

Непрерывность обычная и дискретная

Из соображений непрерывности чаще всего доказывают существование или невозможность некоего объекта или конструкции, не предъявляя его явно.

Если в процессе некоторая величина меняется непрерывно от a до b , она принимает все промежуточные значения. Нужный эффект достигается при некотором конкретном значении величины.

1. Докажите, что найдется хорда, отсекающая от круга ровно треть его площади.

Эффект может достигаться при совпадении величин. В таких случаях стоит последить за отношением или разностью величин.

2. В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 м сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент расстояние между кончиками их клювов было ровно 110 м.

Если процесса нет, его стоит организовать.

3. Периметр выпуклого четырехугольника равен 2004, одна из диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна а) 1; б) 2; в) 1001

4. а) Докажите, что найдется такой горизонтальный отрезок длины 0,01, что один его конец лежит на графике $y=x^5+1$, а другой – на графике $y=x^5$.

б) Верно ли то же для графиков $y=P(x)+1$ и $y=P(x)$, где $P(x)$ – произвольный многочлен степени 2 или выше?

5. Круг разбит на черные и белые части. Докажите, что найдется диаметр, разбивающий пополам как черную, так и белую площадь.

Подбери дискретную величину и берега

Если путь начинается на одном берегу, а заканчивается на другом, то неизбежно придется переправляться. В частности, если какая-то целочисленная величина в процессе меняется на каждом шаге не больше чем на 1 (в ту или другую сторону), то она обязательно проходит через все промежуточные значения между начальным и конечным. Такая величина называется дискретной, а прием – дискретной непрерывностью.

6. В ряду из 100000 натуральных чисел первое число однозначно, а каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в ряду есть число, начинающееся цифрами 2008.

7. Докажите, что между натуральными числами n и $10n$ найдется число, чья сумма цифр ровно на 5 больше, чем у n .

Организуй процесс

8. а) В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек. Докажите, что найдется группа из 10 сидящих подряд детей, в которой девочек и мальчиков поровну.

б) За круглым столом сидят более 10 детей, причем мальчиков и девочек поровну. Докажите, что найдется группа из 10 сидящих подряд детей, в которой девочек и мальчиков поровну.

9. На плоскости отмечены 10000 точек. Докажите, что найдется не проходящая через эти точки окружность, внутри которой лежит ровно 2010 отмеченных точек.

Полезный эффект на переправе

10. На шахматной расставлены 64 шахматных коней четырех мастей: вороные, гнедые, соловые и каурые. Существует ли такая расстановка, в которой вороные не бьют соловых, соловые – гнедых, гнедые – каурых, а каурые – вороных?

11. Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001! + 2$, $1001! + 3$, ..., $1001! + 1001$). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

12. Вершины 50-угольника делят окружность на 50 дуг, длины которых – 1, 2, 3, ..., 50 в некотором порядке. Каждая пара “противоположных” дуг (соответствующих противоположным сторонам 50-угольника) отличается по длине на 25. Доказать, что у 50-угольника найдутся две параллельные стороны.

Домашнее задание

Неп1. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.

Неп2. В ряд сидят больше 10 детей, мальчиков и девочек поровну. Обязательно ли среди них найдется группа из 10 сидящих подряд детей, в которой девочек и мальчиков поровну?

Неп3. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника найдется прямая, пересекающая пополам его периметр и площадь.

Неп 4. Правильный 1001-угольник разбили непересекающимися диагоналями на 999 треугольников. Докажите, что среди этих треугольников по крайней мере три равнобедренных.

Неп5. Из пункта А в пункт В ведут две дороги. Однажды двум машинам, связанным веревкой длиной 10 м, удалось проехать из А в В, причем каждая ехала только по своей дороге. Из А в В по одной дороге выехал воз радиуса 5 м, одновременно из В в А по второй дороге выехал такой же воз. Докажите, что возы не смогут разъехаться.

Неп6. По круглому треку ездят четыре гонщика. Скорости постоянны, но все различны. У одного из гонщиков есть фляжка с питьем. При обгоне тот, у кого фляжка, всегда передает ее другому. Может ли фляжка никогда не попадать к двум из гонщиков? (Известно, что не бывает моментов, когда в одной точке оказываются 3 или 4 гонщика).

А.В.Шаповалов, февраль 2010 г. www.ashap.info/Uroki/1543/2009-10/index.html