Занятие 9: Подмена объекта

Часто можно подменить исследуемый объект или процесс так, что с точки зрения целей исследования замена ничего не меняет, но само исследование при этом значительно упрощается.

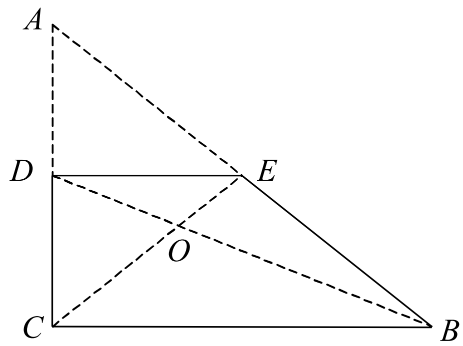
1. По прямой в одном направлении на некотором расстоянии друг от друга движутся 5 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 5 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?

То, на что подменяем, часто бывает хорошо знакомо и уже исследовано.

2. Бумажный прямоугольный треугольник площади 1 перегнули по прямой так, что вершина прямого угла совместилась с другой вершиной.

а) В каком отношении делятся диагонали полученного четырехугольника их точкой пересечения?

б) Полученный четырехугольник разрезали по диагонали, ведущей из третьей вершины исходного треугольника. Найдите площадь наименьшего образовавшегося куска бумаги.



Текущий объект может быть частью знакомого объекта: надо лишь угадать дополнительное построение.

3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат $ABDE$. Дано: $AC = 1$ см, $BC = 3$ см. В каком отношении делит сторону DE биссектриса угла C?

Аналогом дополнительного построения в задачах на движение является добавление дополнительных персонажей.

4. Одновременно из деревень *А* и *Б* навстречу друг другу вышли Аня и Боря (их скорости постоянны, но не обязательно одинаковы). Если бы Аня вышла на 30 минут раньше, то они встретились бы на 2 км ближе к деревне *Б*. Если бы Боря вышел на 30 минут раньше, то встреча состоялась бы ближе к деревне *А*. На сколько?

Если надо доказать равенство сумме отрезков, полезно подменить сумму одним равным ей отрезком. Этот прием в геометрии называется «выпрямление».

5. В квадрате $ABCD$ точки K и M принадлежат сторонам BC и CD соответственно, причём AM – биссектриса угла KAD. Докажите, что длина отрезка AK равна сумме длин отрезков DM и BK.

При работе с многочленом выражение с коэффициентами можно подменить значением многочлена.

6. Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет на интервале (0, 2) три корня. Докажите, что выполнено неравенство $-2 < p + q + r < 0$.

Подменяем на аналогичный объект, но устроенный проще.

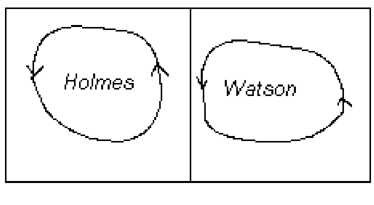
7. Последовательность $\{x_n\}$ определяется условиями: $x_1 = 10$; $x_2 = 20$; $x_{n+2} = x_n - \dfrac{1}{x_{n+1}}$. Докажите, что среди членов последовательности найдётся нуль. Найдите номер этого члена.

Рассматриваемы объекты часто обладают дополнительными свойствами. Угадав свойства и доказав их, мы обнаружим, что объекты нам хорошо знакомы.

8. Высоты AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y – середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые XY и $A'B'$ перпендикулярны.

9. На сторонах BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что лучи A_1A, B_1B и C_1C являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC.

10*. Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями Ватсон и на 20% быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий – через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в четвёртый раз?



Домашнее задание

ПО1. Длины оснований трапеции – целые числа. Докажите, что ее можно разбить на равные треугольники.

ПО2. Рассматриваются такие наборы $(x_1, x_2, ..., x_{20})$ чисел, заключенных между 0 и 1, что $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_{20})$. Найдите среди этих наборов такой, для которого значение произведения $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{20}$ максимально.

ПО3. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, $AB = AD$. На стороне BC взята точка M, а на стороне CD – точка N так, что угол MAN равен половине угла BAD. Докажите, что $MN = BM + ND$.

ПО4. Треугольник ABC вписан в окружность, $AB>BC$. Из середины M дуги ABC опущен перпендикуляр MH на сторону AB. Докажите, что $AM=MB+BC$.