Лексикографический порядок

Аксиома. В каждом множестве натуральных чисел есть минимальный элемент.

Принцип минимального контрпримера. Если утверждение зависит от натурального параметра n, то либо оно верно для всех n, либо есть минимальный контрпример (контрпример с минимальным n).

Задача 1. Докажите, что соседние числа Фибоначчи взаимно просты.

Задача 2. Докажите, что для любого k прозведение k последовательных натуральных чисел делится на k!

Определение. Пусть $A=(a_1,a_2, ...,a_m)$ и $B=(b_1,b_2,...,b_m)$ – две числовые строки длины m. Скажем, что $A<B$ если $a_1<b_1$ либо $a_1=b_1$, $a_2<b_2$ либо $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3<b_3$ и т.д.

$\mathbf{N}^m$ – множество строк натуральных чисел длины m.

Упр3. Если $A<B$, $B<C$ то $A<C$.

Теорема 4. В каждом подмножестве множества $\mathbf{N}^m$ есть минимальный элемент.

Упр5. В строке в беспорядке записаны числа 1, 2,…, 10000. Если найдутся два числа рядом, при этом правое меньше левого, компьютер меняет их местами. Докажите, что в каком бы порядке мы не меняли, числа рано или поздно станут по возрастанию.

Задача 6. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды карту рубашкой вниз или пачку из нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх независимо от того, как Петя выбирает пачки.

Задача 7. Даны три условия на функцию $f(k,n)$:

1. $f(0,n)=n+2$ для всех $n\geq 1$
2. $f(k,1)=2$ при $k>0$
3. $f(k,n)=f(k-1,f(k,n-1)$ для всех пар целых чисел (k,n) (где $k\geq 1$, $n\geq 2$).

Вычислите явные формулы для $f(1,n)$, $f(2,n)$, $f(3,n)$ и докажите, что для всех пар целых чисел (k,n) (где $k\geq 0$, $n\geq 1$)

a) функция однозначно определена.

b) $f(k,n)\geq n+1$

c) Если $n>m$, то при всех k выполнено $f(k,n)>f(k,m)$.

d) $f(3,6)> 1000!^{1000!}$

e) $f(5,5)> 1000!^{1000!}$

Задача 8. В строке в беспорядке записаны положительные числа $a_1,a_2,...,a_{100000}$. Если найдутся два числа рядом, при этом правое меньше левого, то компьютер меняет их местами, и умножает то из них, что оказалось справа, на 1000. Докажите, что рано или поздно все числа в строке будут идти по возрастанию.

Задача 9. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, каждый не на своем месте. Билетер может попросить поменятся местами любых двух соседей, и так много раз, однако зритель, попав на свое место, затем пересаживаться отказывается. Докажите, что билетер может рассадить всех по своим местам.

Домашнее задание

ЛП1. На доске написано натуральное число $n>1$. Разрешается выбрать любой простой делитель p числа n, и заменить n на число $\frac{n}{p}\cdot(p-1)^p$. Докажите, что в результате таких замен на доске рано или поздно появится число 1.

ЛП2. В бесконечной последовательности есть конечное число единиц, остальные члены равны 0. Если найдется группа 01, ее можно заменить на любую группу вида 10...0. Докажите, что удастся сделать лишь конечное число замен.

ЛП3. В прямоугольнике $3\times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трех цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

А.В.Шаповалов, февраль 2010 г. www.ashap.info/Uroki/1543/2009-10/index.html