

Конечное и бесконечное

Сколько бы ни было – хочется еще

Пред1. а) Найдется ли сколь угодно длинный набор подряд идущих составных чисел?

б) Найдется ли бесконечный набор подряд идущих составных чисел?

в) Докажите, что есть бесконечно много простых чисел вида $4k+3$ (где k – целое).

Зад2. Для любого n сумма n первых членов последовательности больше n . Докажите, что в последовательности бесконечно много положительных членов.

Дирихле на бесконечности

Упр3. Докажите, что в десятичной записи $\sqrt{2}$

а) какая-то цифра встречается бесконечно много раз.

б) какие-то две цифры встречаются бесконечно много раз.

Зад4. Круг разделен на 1997 секторов, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе, где находится фишка, фишка сдвигается на это число секторов по часовой стрелке, и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое число ходов все числа станут больше миллиона.

Зад5. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

Накапайте мне три кружки пива

Зад6. Круг радиуса 2010 км раскрашен в два цвета. Докажите, что найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1 мм.

Пред7. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$ больше любого наперед заданного числа при достаточно больших m .

Ковшом моря не вычерпашь

Упр8. Можно ли покрыть прямую конечным числом кругов?

Зад9. Есть несколько геометрических прогрессий: состоящих из натуральных чисел. Докажите, что некоторое натуральное число не входит ни в одну из них.

Зад10. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос (полоса – часть плоскости между параллельными прямыми)?

Не торопись - впереди вечность!

Зад11. Два бога по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Первый своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, второй – одну. Если в итоге получится периодическая дробь, выигрывает первый, иначе – второй. Кто выигрывает при наилучшей игре сторон?

Зад12. Можно ли переставить числа натурального ряда в другом порядке так, чтобы сумма любых первых k чисел делилась на k ?

Зад13. В целых точках прямой расположены ямы, шириной 0,01 каждая. Длина прыжков блохи постоянна и равна $\sqrt{2}$. Докажите, что блоха рано или поздно попадет в яму.

Для самостоятельного решения

Кo1. Можно ли вычеркнуть из последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}$ часть чисел так, чтобы осталась арифметическая прогрессия а) бесконечная; б) из 10 членов?

Кo2. Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренних парабол?

Кo3. Докажите, что бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдется бесконечное количество чисел, больших своего номера в этой последовательности.

Кo4. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.