Периодичность и непериодичность. Зацикливание.

Периодические последовательности – первый шаг от конечных последовательностей к бесконечным.

Зад1. Найдите последнюю цифру числа $777^{555^{333}}$.

Определение. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ называется *периодической* с периодом *T*, если $a_{n+T} = a_n$ для всех *n*. Может случиться, что правило не действует для нескольких первых членов, начиная действовать с *n*=*k*. Тогда начало последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ называется *предпериодом*.

Замечание. Период можно начинать с любого числа (не входящего в предпериод).

Упр 2. Может ли сумма двух последовательностей с предпериодами быть периодической последовательностью без предпериода?

Предложения, и теоремы надо доказывать.

Пред 3. Оставим в периодической последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k, \cdots$ только члены вида $a_N, a_{N+d}, \ldots, a_{N+kd}, \cdots$, (для некоторых натуральных *N* и *d*). Тогда снова получится периодическая последовательность.

Упр 4. а) Существует ли непериодическая последовательность только из единиц и двоек?

б) Существует ли непериодическая последовательность только из троек и пятерок, где нет трех одинаковых цифр подряд?

Зад 5. В каждом числе последовательности 10, 11, 12, 13, ... , 2009, 2010, ... вычеркнули все цифры, кроме двух первых. Докажите, что получилась непериодическая последовательность.

Указание. Плохое (например, непериодичность) удобно доказывать «от противного»: ведь противное в этом случае – хорошее!

Зад 6. **а)** Последовательность периодична с периодом 7. В ней оставлены только 1-й, 10-й, 100-й, 1000-й и т.д. члены. Докажите, что полученная последовательность – периодична.

б) Последовательность периодична. В ней оставлены только члены, чьи номера образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что полученная последовательность – периодична.

Принцип зацикливания. Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит лишь от фиксированного числа предшествующих состояний, она с некоторого момента зациклится.

Зад 7. Незнайка составил программу для компьютера с ограниченной внешней памятью, которая печатает по 100 цифр каждую секунду. Незнайка утверждает, что если компьютеру позволить работать бесконечно долго, то он напечатает в точности десятичную запись числа $\sqrt{2}$. Прав ли он?

Зад 8. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в исходное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

Принцип зацикливания назад. Если система зацикливается, и каждое предыдущее состояние однозначно восстанавливается по фиксированному числу последующих,то система зацикливается без предпериода.

Зад 9. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся по три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он приедет к своему замку.

Зад 10. Установлено, что погода на Сириусе в данный день полностью определяется предыдущей неделей. Варианты погоды: магнитная буря, метеоритный дождь, штиль. Последнюю неделю шел метеоритный дождь. Докажите, что “дождливые” недели всегда были и будут.

Зад 11. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.

а) Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик на предыдущем ходу. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

б) Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Верно ли, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое?

Домашнее задание

Пе1. Докажите, что среди чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... бесконечно много **а)** четных; **b)** кратных 5.

Пе2. Докажите, что бесконечная десятичная дробь 0,123456789101112…20092010… – иррациональное число.

Пе3. Конечная последовательность из N членов непостоянна и периодична с периодами

а) 13 и 14;

б) p и q (где p и q – взаимно просты).

Каково наибольшее значение N?

Пе4* Последовательность задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$ и $0 \le x_1 \le 1$. Докажите, что последовательность периодична ⇔ число x_1 рационально.

Пе5* В числе $a = 0{,}12457...$ n-я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$ (для каждого натурального n). Докажите, что a – иррациональное число.

Пе6* Числовая последовательность $\{x_n\}$ такова, что для любого $n > 1$ выполняется условие: $x_{n+1}=|x_n|-x_{n-1}$. Докажите, что последовательность периодическая с периодом 9.