Постепенное конструирование

Дом строят не сразу: сперва фундамент, потом стены, наконец – крышу. Так и сложные математические примеры, контрпримеры и алгоритмы часто удобнее строить по частям. Порядок действий может быть естественно определен условиями.

1. Вася выставляет по одной бесцветные ладьи на шахматную доску, а Петя красит выставленную ладью в один из 5 цветов. Докажите, что Петя может делать это так, чтобы ни в какой момент ладьи одного цвета друг друга не били.

2. Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо 19-значное число из цифр 1 и 2. После выписывания Первым очередной цифры Второй, если хочет, меняет между собой какие-то две цифры из уже написанного ряда. Всегда ли Второй может добиться того, чтобы итоговое число читалось одинаково слева направо и справа налево?

В предыдущих задачах был процесс. Если процесса нет, его бывает полезно организовать.

3. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы ладьи одинакового цвета друг друга не били.

В частности, многоэтажные здания строят, ставя по очереди следующий этаж на предыдущий. В математике этому соответствует *индуктивное построение*, когда, например, конструкция для n+1 строится из конструкции для n.

4. Плоскость разбита на части несколькими прямыми и окружностями. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, чтобы части одинакового цвета не имели общего участка границы ненулевой длины.

5. На доске выписаны числа 1, 2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{10}. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность – неотрицательное число. После нескольких таких операций на доске будет только одно число. Чему оно может быть равно?

Другой способ построения – это постепенное улучшение. Например, мы строим дом без окон и дверей, а потом прорубаем и навешиваем их. При построении: мы *ослабляем* условия (скажем, отказываемся от части из них), строим «неполноценную» конструкцию, а потом доводим ее до нужной. Частным случаем ослабления является метод подобия в задачах на построение.

6. Впишите квадрат в данный остроугольный треугольник ABC так, чтобы две вершины квадрата попали на сторону AB.

7. Представьте некоторое число двумя способами в виде суммы трех дробей с числителем 1 так, чтобы все 6 дробей были различными.

8. Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{100}$, что НОД($a_1$, a_2) > НОД(a_2, a_3) > ... > НОД(a_{99}, a_{100})?

Там, где нужно много шагов, часто постепенно улучшают какой-то параметр. Например, при наведении порядка с помощью некоторой *группы операций* постепенно уменьшают число вещей, лежащих не на своем месте (кубик Рубика).

9. 9 фишек с номерами 1, 2, ..., 9 лежат в ряд в некотором порядке. За один ход можно перепрыгнуть любой фишкой через 2 или через 5 фишек. Как такими ходами расставить все фишки по возрастанию номеров?

А.В.Шаповалов, 26 декабря 2009 г. www.ashap.info/Uroki/1543/2009-10/index.html

Домашнее задание (не позднее 7 января)

11. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде $3^{u_1}2^{v_1}+3^{u_2}2^{v_2}+\ldots+3^{u_k}2^{v_k}$, где $u_1 > u_2 > \ldots > u_k \geq 0$ и $0 \leq v_1 < v_2 < \ldots < v_k$ – целые числа.

12. Даны окружность и прямая, не пересекающая окружность. Как с помощью циркуля и линейки построить квадрат, две соседние вершины которого лежат на данной окружности, а две другие вершины – на данной прямой (если известно, что такой квадрат существует)?

13. Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{100}$, что НОК($a_1$, a_2) > НОК(a_2, a_3) > ... > НОК(a_{99}, a_{100})?

14. В ряд стоят 23 коробочки с шариками, причем для любого числа n от 1 до 23 есть коробочка, в которой ровно n шариков. За одну операцию можно переложить в любую коробочку еще столько же шариков, сколько в ней уже есть, из какой-нибудь другой коробочки, в которой шариков больше. Всегда ли можно такими операциями добиться, чтобы в первой коробочке оказался 1 шарик, во второй – 2 шарика, и так далее, в 23-й – 23 шарика?

15. Приведите пример такого многочлена $P(x)$ степени 9, что при всех x выполнено равенство $P(x) + P(1 - x) = 1$.

16. Составьте таблицу 3×3 из натуральных чисел, так, чтобы все числа были различными, суммы в строках были равны между собой и произведения в столбцах тоже были равны между собой (но суммы не обязаны равняться произведениям).