

Задачи для знакомства

1. Выписали все натуральные числа меньше миллиарда, у которых сумма цифр делится на 19. Докажите, что их сумма тоже делится на 19.
2. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Докажите, что если окружность, проходящая через точки A , B и O , касается прямой BC , то окружность, проходящая через точки B , C и O , касается прямой CD .
3. Каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Какие значения может принимать угол между диагоналями?
4. Имеется набор гирь, веса которых в граммах: 1, 2, 4, ..., 1024 (последовательные степени двойки) – по одной гире каждого веса. Груз разрешается взвешивать с помощью этого набора, кладя гири на обе чашки весов. Докажите, что никакой груз нельзя взвесить этими гирями более чем 144 способами.
5. Последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots$ определяется условиями: $x_1=25$; $x_2=2009$; $x_{n+2}=x_n - (1/x_{n+1})$ при $n \geq 1$. Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль. Найдите номер этого члена.
6. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство:

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3.$$

7. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.