XL УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ИЖЕВСК, 30.11-06.12.2012

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 1.12.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. На столе в ряд лежат 2012 яблок. Вася берёт каждое десятое яблоко (т. е. десятое, двадцатое, тридцатое и т. д.). После этого он берёт каждое девятое из оставшихся яблок, затем каждое восьмое из оставшихся и т. д., наконец, он берёт каждое третье из оставшихся к этому моменту яблок. Сколько яблок останется в итоге на столе? *(С. Берлов)*

2. Вася сбегает по эскалатору, едущему вниз, не пропуская ни одной ступеньки. Скорость Васи вдвое больше скорости эскалатора. Пока Вася ехал, он пробежал 80 ступеней. Сколько ступеней он пробежит, если будет сбегать по неподвижному эскалатору? *(И. Рубанов по мотивам фольклора)*

3. В классе несколько парт. Оказалось, что ровно половина всех девочек сидят рядом с мальчиками, а мальчиков и девочек, сидящих в одиночку за партой, поровну. Докажите, что мальчиков в классе чётное число. *(С. Берлов)*

4. В записи нечетного шестизначного числа все цифры различны и нет нулей. При этом оно делится на трёхзначные числа, образованные первыми тремя его цифрами и последними тремя его цифрами. Докажите, что это число делится на 67. *(С. Берлов)*

5. На острове, где живут 900 человек, из которых некоторые — рыцари, всегда говорящие правду, а некоторые — лжецы, которые всегда лгут, прошли выборы. В этих выборах участвовали две партии, причём каждый из островитян проголосовал за одну из них. На выходе с участков каждого островитянина спросили, за какую из партий он голосовал. Оказалось, что людей, сказавших, что они голосовали за вторую партию, вдвое больше, чем поданных за эту партию голосов, а людей, сказавших, что они голосовали за первую партию, вдвое меньше, чем поданных за эту партию голосов. Сколько голосов было подано за первую партию? *(С. Берлов)*

6. У Васи имеется набор из 1000 единичных кубиков. На каждой грани каждого кубика расположено несколько точек, причём на разных гранях может быть разное число точек, но все кубики одинаковы между собой. Докажите, что из этих кубиков можно составить большой куб, суммарное количество точек на всех гранях которого делится на 7. *(И. Рубанов, С. Берлов)*

7. На табло расположено 10 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который меняет состояние лампочки. Петя и Вася играют в такую игру: каждый из мальчиков своим ходом может щёлкнуть одним выключателем, изменив состояние одной лампочки. Запрещается повторять ситуацию, которая уже была (включая изначальную). Проигрывает тот, кто

не имеет хода. Начинает Петя. Кто из ребят выиграет при правильной игре?
(К. Кохась, Baltic Way, 2012)

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 1.12.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. Пусть a и b некоторые положительные действительные числа, причём $a > b$. Какая из дробей — a/b или b/a — меньше отличается от числа 1? *(Eesti regional 2011, 10 class)*

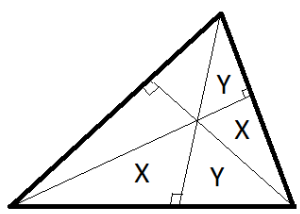
2. На острове, где живут 1000 человек, из которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а некоторые — лжецы, которые всегда лгут, прошли выборы. В этих выборах участвовали 2 партии, причём каждый из островитян проголосовал за одну из них. На выходе с участков каждого островитянина спросили: за какую из партий он голосовал? На этот вопрос по крайней мере 800 островитян ответили: «За первую партию». Но на самом деле оказалось, что за вторую партию проголосовало 800 островитян. Докажите, что на этом острове не менее 600 лжецов. *(С. Берлов)*

3. Дан набор попарно различных целых чисел. Каждое из чисел набора является суммой каких-то двух других чисел, входящих в этот набор. Каково наименьшее возможное количество чисел в таком наборе? *(И. Рубанов)*

4. На доске выписаны все натуральные делители числа n, три наименьшие из которых — это $1 < a < b$. Оказалось, что $n = a^2+b^3$. Найдите все такие n. *(Мексика, 2008)*

5. На табло расположено 10 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который меняет состояние лампочки. Петя и Вася играют в такую игру: каждый из мальчиков своим ходом может щёлкнуть одним выключателем, изменив состояние одной лампочки. Запрещается повторять ситуацию, которая уже была (включая изначальную). Проигрывает тот, кто не имеет хода. Начинает Петя. Кто из ребят выиграет при правильной игре? *(К. Кохась, Baltic Way, 2012)*

6. Три высоты остроугольного треугольника разбили его на шесть треугольников (см. рис.). Оказалось, что треугольники, отмеченные буквой X, равны. Докажите, что треугольники, отмеченные буквой Y, тоже равны. *(А. Шаповалов)*



7. У Васи имеется бесконечный набор единичных кубиков. На каждой грани каждого кубика написано натуральное число. Докажите, что из этих кубиков можно составить большой куб, сумма чисел на всех гранях которого делится на 2012. *(И. Рубанов, С. Берлов)*

8. Найдите все тройки натуральных чисел x, y и z, для которых выполняется равенство $(x+y)(1+xy) = 2^z$. *(Украина 2004)*

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 1.12.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. На острове, где живут 1000 человек, из которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а некоторые — лжецы, которые всегда лгут, прошли выборы. В этих выборах участвовали 2 партии, причём каждый из островитян проголосовал за одну из них. На выходе с участков каждого островитянина спросили: за какую из партий он голосовал? На этот вопрос по крайней мере 800 островитян ответили: «За первую партию». Но на самом деле оказалось, что за вторую партию проголосовало 800 островитян. Докажите, что на этом острове не менее 600 лжецов. *(С. Берлов)*

2. Точка P расположена внутри треугольника ABC так, что $BP > AP$ и $BP > CP$. Докажите, что $\angle ABC < 90°$. *(Швеция, 2011)*

3. Пусть $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ — все делители натурального числа n. Найдите все n, для которых $n = d_2^2 + d_3^3$. *(Мексика, 2008)*

4. У Васи имеется бесконечный набор прямоугольников со сторонами, не превосходящими 10. На каждой стороне каждого прямоугольника написано натуральное число. Докажите, что из этих прямоугольников можно составить (без пробелов и наложений) большой прямоугольник, сумма чисел на всех сторонах которого делится на 2012. *(И. Рубанов, С. Берлов, К. Сухов)*

5. Арне и Бертиль играют в игру на доске 11×11. Начинает Арне. В начале игры фишка стоит на центральной клетке. Каждым ходом Арне двигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали, а Бертиль возводит стенку с одной из сторон любой клетки. Двигать фишку через стенку Арне не может. Арне хочет уйти с доски, а Бертиль хочет ему помешать. Кто добьётся своей цели при правильной игре? *(Швеция, 2011)*

6. В вершинах куба написаны 8 различных натуральных чисел, по одному в каждой вершине, а на каждом ребре написан наибольший общий делитель двух чисел, стоящих в концах этого ребра. Может ли сумма всех чисел на рёбрах быть равна сумме всех чисел в вершинах? *(Мексика, 2008)*

7. В треугольнике ABC $AB > AC > BC$. Точка D на стороне AB такова, что $CD = BC$, а точка M — середина AC. Докажите, что $BD = AC$ тогда и только тогда, когда $\angle BAC = 2\angle ABM$. *(Мексика, 2007)*