

38-й Международный математический Турнир городов
2016/17 учебный год
Решения задач

Базовый вариант

Младшие классы

1. [4] Взяли пять натуральных чисел и для каждого двух записали их сумму. Могло ли оказаться, что все 10 получившихся сумм оканчиваются разными цифрами?

(М. Евдокимов)

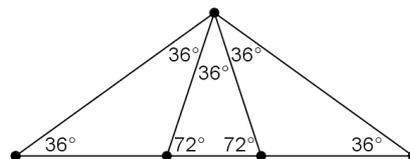
Ответ. Не могло. **Решение 1.** Пусть взяли x чётных чисел и y нечётных ($x + y = 5$). Тогда нечётных сумм оказалось xy . Если бы все суммы оканчивались разными цифрами, то xy было бы равно 5, тогда $x + y$ должно было бы равняться 6.

Решение 2. Рассмотрим сумму S полученных десяти сумм. Если эти суммы оканчиваются на десять разных цифр, то число S нечётно. Но каждое из исходных пяти чисел входит в четыре суммы, поэтому число S чётно. Противоречие.

2. [4] На прямой отмечено четыре точки и ещё одна точка отмечена вне прямой. Всего существует шесть треугольников с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными? (Е. Бакаев)

Ответ. Все шесть. **Решение.** Возьмём равнобедренный треугольник с углом 108° . Поделим этот угол на три равных (см. рис.). Образовавшиеся шесть треугольников будут, очевидно, равнобедренными.

Замечание. Пример единственен.



3. На окружности отмечено 100 точек. Эти точки нумеруются числами от 1 до 100 в некотором порядке.

а) [2] Докажите, что при любой нумерации точки можно разбить на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были нечётными.

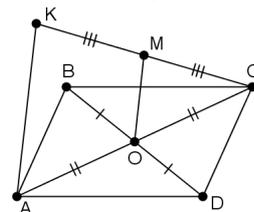
б) [2] Верно ли, что при любой нумерации можно разбить точки на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были чётными? (П. Кожевников)

а) Решение. Найдутся две соседние точки с номерами разной чётности. Соединим их и мысленно удалим. Из оставшихся точек снова можно выбрать две соседние и т.д. В итоге все точки разобьются на нужные пары.

б) **Ответ.** Неверно. **Решение.** Занумеруем точки в естественном порядке. Отрезок, соединяющий два числа одной чётности, разобьёт оставшиеся точки на две нечётные кучки, которые на пары уже не разбить.

4. [5] Даны параллелограмм $ABCD$ и такая точка K , что $AK = BD$. Точка M – середина CK . Докажите, что $\angle BMD = 90^\circ$. (Е. Бакаев)

Решение. Пусть O – центр параллелограмма. Тогда OM – средняя линия треугольника CAK ($OM = \frac{1}{2}AK$ и в случае, когда K лежит на прямой CA). Поэтому в треугольнике BMD медиана MO равна половине противоположной стороны $BD = AK$. Значит, угол BMD прямой.



Замечание. Если $AK \parallel BD$, то треугольник BMD вырождается и угол BMD не имеет смысла.

5. [5] Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше – 2 ягоды, следующий – 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наименьшее количество ягод может оставить медвежатам лиса? (Е. Бакаев)

Ответ. 100 ягод. **Решение.** Заметим, что на каждом шаге, если оба участвующих медвежонок имели хотя бы по ягоде, то у них по крайней мере по ягоде останется. Поэтому в конце у каждого медвежонок останется не меньше одной ягоды.

Докажем, что лиса может оставить каждому медвежонок ровно по одной ягоде, то есть перейти из позиции $(1, 2, \dots, 2^{99})$ в позицию $(1, 1, \dots, 1)$.

Для этого докажем по индукции, что в случае n медвежат лиса из позиции $(1, 2, \dots, 2^{n-1})$ может перейти в позицию $(1, 1, \dots, 1, 2^{n-1})$, а из последней – в позицию $(1, 1, \dots, 1)$.

База. При $n = 1$ все три позиции совпадают.

Шаг индукции. Из позиции $(1, 2, \dots, 2^{n-1}, 2^n)$, забыв про последнего медвежонок, можно по предположению индукции перейти сначала в $(1, 1, \dots, 1, 2^{n-1}, 2^n)$, а потом в $(1, 1, \dots, 1, 2^n)$. Задействовав последних двух медвежат, лиса переходит в позицию $(1, 1, \dots, 1, 2^{n-1}, 2^{n-1})$. Теперь, снова забыв про последнего медвежонок, можно перейти в позицию $(1, 1, \dots, 1, 2^{n-1})$, а из неё, забыв про первого, – в позицию $(1, 1, \dots, 1)$.

Старшие классы

1. [4] Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трёхчленов со старшими коэффициентами p и q . Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно $p + q$? (Н. Седракан)

Ответ. 0. **Решение 1.** Пусть вершины парабол – точки (a, b) и (c, d) соответственно. Тогда уравнения парабол: $y = p(x - a)^2 + b$ и $y = q(x - c)^2 + d$. Принадлежность вершин записывается условиями: $d = p(c - a)^2 + b$ и $b = q(a - c)^2 + d$. Складывая их и сокращая, получим $(p + q)(a - c)^2 = 0$. Если $a = c$, то и $b = d$, а вершины различны. Поэтому $p + q = 0$.

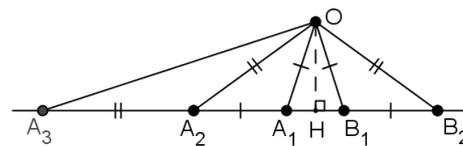
Решение 2. Пусть A и B – вершины парабол. Рассмотрим третью параболу, симметричную первой относительно середины отрезка AB . Она имеет вершину B и содержит точку A . Поскольку парабола однозначно определяется своей вершиной и ещё одной точкой, третья парабола совпадает со второй. Значит, старшие коэффициенты исходных парабол отличаются только знаком.

2. [5] На прямой отмечено 100 точек, и ещё одна точка отмечена вне прямой. Рассмотрим все треугольники с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными? (Е. Бакаев)

Ответ. 150. **Решение.** Пусть l – данная прямая, O – отмеченная точка вне её, H – основание перпендикуляра, опущенного из O на l .

Оценка. Основание равнобедренного треугольника может лежать на l или не лежать. Рассматриваемые треугольники первого вида симметричны относительно OH , поэтому их не больше 50 – половины отмеченных точек на l . Треугольников второго вида с данным основанием OA может быть не более одного, так как вершина определяется пересечением l и серединного перпендикуляра к OA . Поэтому треугольников второго вида не больше 100.

Пример 1. Отложим от луча OH лучи под углом 18° . Они пересекут l в точках A_1 и B_1 , отметим их. Отложим на l в другую сторону от A_1B_1 отрезок $A_1A_2 = A_1O$, затем отрезок $A_2A_3 = A_2O$, ..., отрезок $A_{49}A_{50} = A_{49}O$. Аналогично отметим точки B_2, \dots, B_{50} . Равнобедренными будут 50 треугольников OA_iB_i , по 49 треугольников OA_iA_{i+1} и OB_iB_{i+1} , треугольники OA_1B_2 и OB_1A_2 с углами $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$.



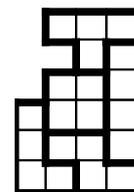
Пример 2. Рассмотрим вершины правильного 101-угольника. Отметим одну из них – O , её соседей – A и B , а для каждой из остальных вершин X отметим её образ X' при инверсии с центром O и радиусом OA . Тогда все отмеченные точки, кроме O , лежат на AB (причём лучи, идущие в них, разбивают угол AOB на 99 равных углов). Так как при инверсии треугольники OXY и $OY'X'$ подобны, то количество равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках равно количеству равнобедренных треугольников вида OXY , где X и Y – вершины 101-угольника. А таких треугольников – 50 с основанием, не содержащим O , и 100 с основанием, содержащим O .

3. [5] Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше – 2 ягоды, следующий – 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наибольшее количество ягод может съесть лиса? (Е. Бакаев)

Ответ. $2^{100} - 101$. См. решение задачи 5 младших классов.

4. [5] Петя нарисовал многоугольник площадью 100 клеток, проводя границы по линиям квадратной сетки. Он проверил, что его можно разрезать по границам клеток и на два равных многоугольника, и на 25 равных многоугольников. Обязательно ли тогда его можно разрезать по границам клеток и на 50 равных многоугольников? (Е. Бакаев)

Ответ. Обязательно. **Решение.** 25 равных многоугольников содержат по четыре клетки, то есть образуют тетрамино. Есть пять видов тетрамино – в форме букв O, I, L, Z и T (см. рис.). Каждое тетрамино, кроме T, можно разрезать на доминошки, получив 50 равных многоугольников.

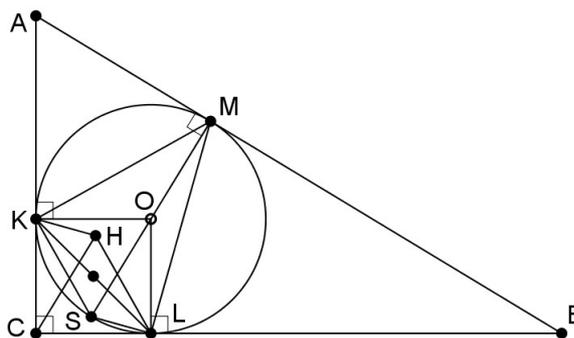
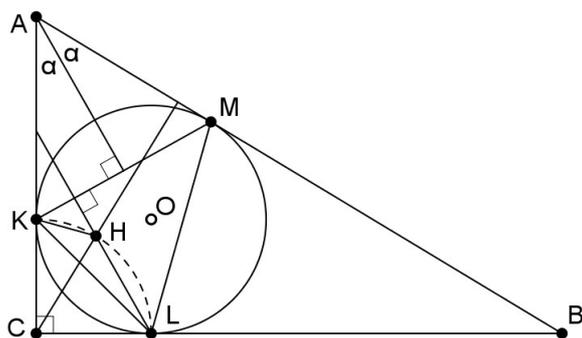


Предположим, что использовалось T-тетрамино. Раскрасим клетки Петиного многоугольника в шахматном порядке и подсчитаем разность D количеств чёрных и белых клеток. Пусть в одном из 50-клеточных многоугольников такая разность равна d . Поскольку чётность разности чисел совпадает с чётностью их суммы, число d чётно. При наложении равных многоугольников цвета клеток не меняются или меняются все. Поэтому во втором 50-клеточном многоугольнике разность равна $\pm d$. Значит, D делится на 4. Но в каждом T-тетрамино исследуемая разность равна ± 2 , следовательно, $D \equiv 25 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{4}$. Противоречие.

5. [6] Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведённой из прямого угла. (А. Заславский)

Решение. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC , а окружность с центром O касается катетов AC , BC и гипотенузы AB в точках K , L и M соответственно.

Способ 1. Обозначим $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 2\beta$. Прямая LH и биссектриса угла A параллельны как перпендикуляры к MK (рис. слева). Значит, угол между прямыми LH и AC равен α , а $\angle HLC = 90^\circ - \alpha$. Аналогично $\angle HKC = 90^\circ - \beta$. Из четырёхугольника $HLCK$ находим $\angle KHL = 90^\circ + \alpha + \beta = 135^\circ$. Так как $CK = CL$ и $\angle KHL + \frac{1}{2}\angle KCL = 180^\circ$, то точка H лежит на окружности с центром C и радиусом CK . Поэтому треугольник KCH равнобедренный и $\angle KCH = 2\beta$. Следовательно, прямые CH и AB пересекаются под углом 90° , что и требовалось.



Способ 2. Пусть MS – диаметр вписанной окружности (рис. справа). Тогда SK и LH параллельны как перпендикуляры к MK . Аналогично параллельны SL и KH , то есть $SKHL$ – параллелограмм. Поскольку $CKOL$ – квадрат, то отрезки CH и OS симметричны относительно середины отрезка KL . Значит, $CH \parallel MS \perp AB$.

Замечание для знатоков. Параллельность CH и MO сразу следует из того, что в любом треугольнике ортоцентр (H), вершина (M), центр (O) описанной окружности и точка, симметричная ему относительно противоположной стороны (в данном случае это C), образуют параллелограмм, возможно, вырожденный.