37-й Международный математический Турнир городов

2015/16 учебный год

Весенний тур

Базовый вариант

Решения задач (*А. Семёнов, Л. Медников*)

Младшие классы

1. [3] По кругу стоят мальчики и девочки (есть и те, и другие), всего 20 детей. Известно, что у каждого мальчика сосед по часовой стрелке – ребёнок в синей футболке, а у каждой девочки сосед против часовой стрелки – ребёнок в красной футболке. Можно ли однозначно установить, сколько в круге мальчиков? (*Е. Бакаев*)

Ответ. Можно. **Решение**. Расположения МХД (по часовой стрелке) быть не может из-за цвета футболки ребёнка Х. Поэтому через одного от мальчика по часовой стрелке должен стоять мальчик, через одного от него – снова мальчик, и т.д. Значит, мальчиков не меньше половины всех детей в круге. По аналогичным соображениям девочек тоже не меньше половины. Следовательно, мальчиков и девочек по 10.

2. [4] В остроугольном треугольнике ABC угол C равен 60°. Пусть H – точка пересечения высот этого треугольника. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает прямые CA и CB в точках M и N соответственно. Докажите, что AN и BM параллельны (или совпадают). (*Е. Бакаев*)

Решение. Прямая CB и проведённая окружность симметричны относительно высоты AH. Значит, и их общие точки C и N симметричны. Поэтому в треугольнике ACN два угла по 60°, и он равносторонний. Аналогично, треугольник BCM – равносторонний. Следовательно, прямые AN и BM параллельны (ввиду равенства углов CAN и CMB).

3. [5] Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016? (*Фольклор*)

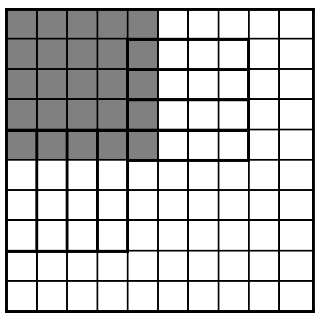
Ответ. Существуют. **Пример 1**. 1008, 2, 1510 единиц и 504 минус единицы.

Пример 2. 9, 7, –8, –4 и 2012 единиц.

Замечание. Есть и другие примеры.

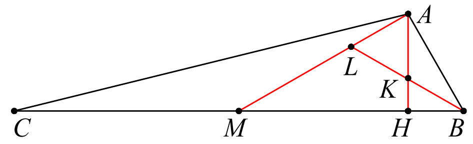
4. [5] В квадрате 10×10 все клетки левого верхнего квадрата 5×5 закрашены чёрным цветом, а остальные клетки – белым. На какое наибольшее количество многоугольников можно разрезать (по границам клеток) этот квадрат так, чтобы в каждом многоугольнике чёрных клеток было в три раза меньше, чем белых? (Многоугольники не обязаны быть равными или даже равновеликими.) (*Е. Бакаев*)

Ответ. На 9 многоугольников. **Решение**. В каждом многоугольнике разбиения должны быть клетки обоих цветов. Значит, в нём должна быть чёрная клетка, граничащая с белой. Но таких клеток всего 9. Пример разрезания на 9 многоугольников см. на рисунке.



5. [5] На листе бумаги синим карандашом нарисовали треугольник, а затем провели в нём красным карандашом медиану, биссектрису и высоту (возможно, не все из разных вершин), лежащие внутри треугольника. Получили разбиение треугольника на части. Мог ли среди этих частей оказаться равносторонний треугольник с красными сторонами? (*М. Евдокимов*)

Ответ. Мог. **Решение**. Пусть в треугольнике ABM с углами соответственно 90°, 60° и 30° высота AH и биссектриса BL пересекаются в точке K (см. рис.). Отметим ещё точку C так, чтобы M стала серединой BC. Простой подсчёт углов показывает, что в треугольнике ABC медиана AM, высота AH и биссектриса BL отрезают красный равносторонний треугольник AKL.



Замечание. Конструкция единственна.

Старшие классы

1. [4] Точку внутри выпуклого четырёхугольника соединили со всеми вершинами и с четырьмя точками на сторонах (по одной на стороне). Четырёхугольник оказался разделён на восемь треугольников с одинаковыми радиусами описанных окружностей. Докажите, что исходный четырёхугольник – вписанный. (*Е. Бакаев*)

Решение. Пусть выбранная точка O внутри четырёхугольника $ABCD$ соединена с точкой K на стороне AB. Углы OAK и OBK опираются на общую хорду равных окружностей. Их сумма не равна 180°, поскольку меньше суммы углов треугольника OAB. Поэтому эти углы равны. Значит, $OA = OB$. Аналогично, все вершины четырёхугольника $ABCD$ равноудалены от O, что и требовалось доказать.

2. [4] См. задачу 3 младших классов.

3. [4] См. задачу 4 младших классов.

4. [6] Фирма записала свои расходы в рублях по 100 статьям бюджета, получив список из 100 чисел (у каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый счетовод взял копию списка и находит приближённую сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он выбирает из списка любые два числа, складывает их, отбрасывает у суммы знаки после запятой (если они есть) и записывает результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 99 чисел он делает то же самое, и так далее, пока в списке не останется одно целое число. Оказалось, что в итоге все счетоводы получили разные результаты. Какое наибольшее число счетоводов могло работать в фирме? (*М. Евдокимов*)

Ответ. 51 счетовод. **Решение**. *Оценка*. Счетоводы каждый раз вычисляли целую часть суммы каких-то двух чисел, которая равна сумме их целых частей плюс, возможно, единица. Назовём это добавление единицы *оказией*. Она могла случаться лишь тогда, когда оба слагаемых были нецелыми. Каждый счетовод получил в итоге сумму целых частей исходных чисел плюс количество оказий, случившихся у него. Поскольку каждая оказия удаляла два нецелых числа, то оказий было максимум 50, а возможных различных результатов – 51.

Пример. Пусть было 50 чисел 0,3 и 50 чисел 0,7. Покажем, как счетоводу получить любой целый результат k от 0 до 50. Сначала он складывает k раз $0{,}3 + 0{,}7$ и получает k единиц (при $k = 0$ он складывает $0{,}3 + 0{,}3$). Далее к имеющемуся уже целому числу он добавляет по очереди все остальные числа без оказий.

5. На каждом из 12 рёбер куба отметили его середину. Обязательно ли сфера проходит через все отмеченные точки, если известно, что она проходит

а) [3] через какие-то 6 из отмеченных точек;

б) [3] через какие-то 7 из отмеченных точек? (*М. Евдокимов*)

Ответ. **а**) Не обязательно; **б**) обязательно. **Решение 1**. **а**) Рассмотрим вершину A куба. Середины шести рёбер, выходящих из вершины A или противоположной вершины, отметим синим, а остальные – красным. Расстояния от A до красных точек одни и те же, а до синих – другие. Поэтому через шесть красных точек проходит сфера с центром A, не содержащая синих точек.

б) Верхняя и нижняя грани куба содержат по четыре отмеченных точки. Оставшиеся четыре точки находятся в горизонтальной плоскости, проходящей через центр O куба. Из семи отмеченных точек, через которые проходит сфера, какие-то три принадлежат одной из трёх указанных плоскостей. В этой плоскости четыре отмеченные точки лежат на окружности. Поскольку три из этих точек лежат на сфере, то её центр находится на вертикальной прямой, проходящей через O. Рассмотрев вместо верхней и нижней переднюю и заднюю грани, мы аналогично докажем, что центр сферы принадлежит другой прямой, проходящей через O. Следовательно, центр сферы совпадает с O. Поскольку расстояния от O до всех середин рёбер одинаковые, то все отмеченные точки лежат на этой сфере.

Решение 2. Все 12 точек лежат на сфере, центр которой совпадает с центром куба. Если некоторые из них лежат на другой сфере, то они лежат на окружности пересечения двух сфер, то есть в одной плоскости. Сечение куба этой плоскостью имеет не более шести сторон, поскольку у куба шесть граней. При этом только вершины сечения лежат на рёбрах куба. Следовательно, семь отмеченных точек не могут лежать на другой сфере. А шесть могут, поскольку у куба есть сечение в виде правильного шестиугольника с вершинами в серединах рёбер. Такие точки и указаны в решении 1 а).

Сложный вариант

Решения задач (*А. Семёнов, А. Шаповалов и др.*)

Младшие классы

1. [4] На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до 1000000 включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа. (*А. Толпыго*)

Решение. Кусочек $\overline{ab}$ встретится при любом разрезании пятизначного числа $\overline{abcab}$.

2. Существуют ли такие целые числа a и b, что

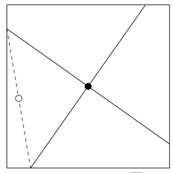
а) [2] уравнение $x^2 + ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + ax + b = 0$ имеет?

б) [3] уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + 2ax + b = 0$ имеет? (*А. Храбров*)

а) **Ответ**. Существуют. **Решение**. Уравнение $x^2 - 3x + 3 = 0$ не имеет корней, поскольку у него дискриминант отрицательный, а второе уравнение имеет корни $x_1 = {}^4/_3$, $x_2 = {}^5/_3$.

б) **Ответ**. Не существуют. **Решение**. Пусть функция $f(x) = x^2 + 2ax + b = (x + a)^2 + b - a^2$ не обращается в ноль. Тогда $b - a^2$ положительно, а потому не меньше 1 (a и b – целые). Значит, $f(x) \geq 1$ при любом x. Замена x^2 целой частью уменьшает значение функции менее чем на 1, а потому оставляет её положительной.

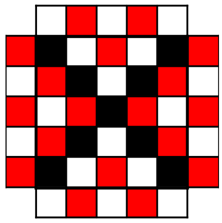
3. [6] Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырёхугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$. (*И. Богданов*)



$1+1/\sqrt{2}$

Решение. Разрежем данный квадрат на 25 квадратиков 2×2. Каждый из них разрежем отрезками, исходящими из центра и делящими стороны на отрезки длины $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (см. рис.). Получится четыре равных четырёхугольника, переходящих друг в друга при повороте на 90°. Они вписаны в окружности с диаметрами $\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{3}$.

4. [8] Художник-абстракционист взял деревянный куб 5×5×5, разбил каждую грань на единичные квадраты и окрасил каждый из них в один из трёх цветов – чёрный, белый или красный – так, что нет соседних по стороне квадратов одного цвета. Какое наименьшее число чёрных квадратов могло при этом получиться? (Квадраты, имеющие общую сторону, считаются соседними и в случае, если они лежат на одной грани куба, и в случае, если они лежат на разных гранях куба.) (*М. Евдокимов*)



Ответ. 18 квадратов. **Решение**. *Оценка*. Три квадрата при вершине куба образуют цикл соседних клеток длины 3. Вокруг него образуется ещё один цикл длины 9 из соседних клеток. А вокруг него – цикл длины 15. Взяв вокруг двух противоположных вершин куба по три таких цикла, а вокруг остальных вершин – по два малых цикла, получим 18 непересекающихся нечётных циклов. Поскольку нечётный цикл в два цвета правильно покрасить нельзя, каждый из них должен содержать чёрные клетки.

Пример. Покрасим четыре боковые грани в красный и белый цвета в шахматном порядке. Верхнюю и нижнюю грани покрасим как на рисунке.

5. [8] Пусть p – простое число, большее 10^k. Взяли число, делящееся на p, и вставили между какими-то двумя его соседними цифрами k-значное число A. Получили число, делящееся на p. В него вставили k-значное число B – между двумя соседними цифрами числа A, – и результат снова оказался делящимся на p. Докажите, что число B получается из числа A перестановкой цифр. (*И. Богданов*)

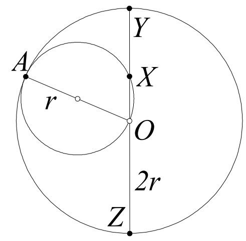
Решение. Через $\overline{XY}$ будем обозначать число, полученное приписыванием к числу X справа числа Y. (X и Y могут содержать незначащие нули слева.)

Первый способ. Пусть число $\overline{CAD}$ получено из исходного числа $\overline{CD}$. Так как эти числа делятся на p, то на p делится и число $\overline{CAAD}=(\overline{CAD}-\overline{CD})\cdot 10^k+\overline{CAD}$.

Пусть $A=\overline{EF}$ и из числа $\overline{CAD}$ вставкой числа B получено число $\overline{CEBFD}$, кратное p. Вычитая из него число $\overline{CAAD}=\overline{CEFEFD}$ и сокращая на степень десятки, получим, что число $B-\overline{FE}$ делится на p. Но последнее число по модулю меньше 10^k, то есть меньше p. Следовательно, $B=\overline{FE}$, что и требовалось.

Второй способ. В тех же обозначениях, вычитая из $\overline{CEFD}$ число $\overline{CD}$, получим, что $\overline{CEF}-C$ делится на p. Аналогично, из чисел $\overline{CEBFD}$ и $\overline{CEFD}$ выводим делимость $\overline{CEB}-\overline{CE}$ на p. Домножив $\overline{CEF}-C$ на подходящую степень десятки и прибавив E к обоим числам разности, заключаем, что $\overline{CEFE}-\overline{CE}$ делится на p. Следовательно, $\overline{CEB}-\overline{CEFE}=B-\overline{FE}$ делится на p.

6. [9] Робот-пылесос, имеющий форму круга, проехал по плоскому полу. Для каждой точки граничной окружности робота можно указать прямую, на которой эта точка оставалась в течение всего времени движения. Обязательно ли и центр робота оставался на некоторой прямой в течение всего времени движения? (*И. Вайнштейн*)



Ответ. Не обязательно. **Решение**. Пусть робот-круг катится без скольжения изнутри по окружности вдвое большего радиуса. Тогда центр робота описывает окружность. Докажем, что каждая точка границы робота двигается по одному из диаметров большой окружности. Обозначения приведены на рисунке. Длины дуг AX и AY вычисляются как $r\cdot 2\angle AOX$ и $2r\cdot\angle AOY$, а потому равны. Следовательно, X и Y – два положения одной точки границы робота. Значит, точка X будет двигаться по диаметру YZ.

7. **а**) [5] Есть $2n + 1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе – хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

б) [5] Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причём хороших и плохих поровну. (*А. Шаповалов*)

а) **Ответ**. За $n + 2$ попытки. **Решение**. *Оценка*. Пусть была $n + 1$ попытка. В каких-то двух попытках использовалась одна и та же батарейка, сделаем её плохой. В остальных $n - 1$ попытках выберем по батарейке и сделаем их плохими. Всего не более n плохих батареек, а фонарик точно светить не будет.

Пример. Разобьём батарейки на n кучек: в одной – три батарейки, в остальных – по две. В какой-то кучке окажется хотя бы две хороших батарейки. В каждой кучке проверим все возможные пары – всего $n + 2$, и фонарик загорится.

б) **Ответ**. За $n + 3$ попытки. **Решение**. *Оценка*. Пусть было $n + 2$ попытки. В каких-то попытках использовалась одна и та же батарейка, сделаем её плохой. Если осталось менее n попыток, то в каждой из них выберем по плохой батарейке. Если же осталось n попыток, то в них использовались только оставшиеся $2n - 1$ батареек. Поэтому опять в каких-то двух попытках использовалась одна и та же батарейка, сделаем её плохой. В остальных $n - 2$ попытках выберем по плохой батарейке. Всего не более n плохих батареек, а фонарик точно светить не будет.

Пример. Разобьём батарейки на $n - 1$ кучек: в двух – по три батарейки, в остальных – по две. В какой-то кучке окажется хотя бы две хороших батарейки. В каждой кучке проверим все возможные пары – всего $n + 3$, и фонарик загорится.

Замечание. При $n = 2$ нужно 6 попыток.

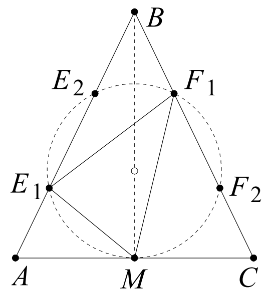
Для знатоков. Решим эту задачу в общем случае, когда из b батареек $k + 1$ хороших, где $1 \le k < b$. Считая батарейки вершинами, а попытки рёбрами, переформулируем: в каком b-графе без (k+1)-антиклик наименьшее количество рёбер? (Подсчёт количества рёбер предоставим читателю.) На этот вопрос, если рассмотреть дополнение графа отвечает *теорема Турана*: в b-графе из k компонент связности почти равного размера, каждая из которых – клика.

Старшие классы

1. [4] См. задачу 1 младших классов.

2. [5] См. задачу 3 младших классов.

3. [6] Пусть M – середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На сторонах AB и BC отмечены соответственно точки E и F так, что $AE \neq CF$ и $\angle FMC = \angle MEF = \alpha$. Найдите $\angle AEM$. (*М. Прасолов*)



Ответ. α. **Решение**. Рассмотрим описанную окружность треугольника MEF. Угол между касательной и хордой MF равен $\angle MEF = \angle FMC$. Поэтому MC и есть касательная. Значит, центр окружности лежит на высоте BM. Следовательно, эта высота является осью симметрии рисунка. Поскольку $AE \neq CF$, то окружность пересекает каждую из боковых сторон в двух точках. Причём E и F не симметричны. Два возможных случая снабжены соответствующими индексами (см. рис.). Рассмотрим их.

1) Внешний угол AE_1M вписанного четырёхугольника $ME_1E_2F_2$ равен углу MF_2E_2, а последний равен симметричному углу $ME_1F_1 = \alpha$.

2) Вписанные углы AE_2M и $ME_2F_2 = \alpha$ опираются на симметричные дуги.

4. [8] В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Мы можем выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос “есть ли дорога между ними?”. Мы хотим узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов. (*К. Кноп*)

Решение. Переформулируем задачу.

Дан полный граф на 64 вершинах с белыми рёбрами (их всего 2016). Играют двое. Петя указывает белое ребро, а Вася удаляет его или делает чёрным. Перед последним ходом Петя предсказывает, какой в итоге получится граф – связный или нет. Докажем, что Вася может опровергнуть любое предсказание Пети.

Всё время рассматриваем граф всех вершин и оставшихся белых и чёрных рёбер. Если указанное Петей ребро содержится в каком-то цикле, то Вася удаляет его, иначе – делает чёрным. При этом связность графа сохраняется, а чёрные рёбра в циклы не входят.

Перед последним ходом остаётся лишь одно белое ребро. Значит, циклов не осталось, и граф – дерево. Поэтому Вася может как удалить это ребро, нарушив связность, так и сохранить вместе со связностью.

5. [8] На доске написано несколько приведённых многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на такие два приведённых многочлена 37-й степени f_1 и g_1, что $f + g = f_1 + g_1$ или $fg = f_1g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней. (*А. Кузнецов*)

Решение. Заметим, что при замене многочленов f и g на f_1 и g_1 сумма коэффициентов при 36-х степенях этих многочленов не меняется. Для замены первого вида (при которой $f + g = f_1 + g_1$) это очевидно, а при замене второго вида это следует из равенства $(x^{37} + ax^{36} + \ldots)(x^{37} + bx^{36} + \ldots) = x^{74} + (a + b)x^{73} + \ldots$ Но вначале сумма всех таких коэффициентов у выписанных на доске многочленов неотрицательна, значит, она всегда будет такой. Если в конце все многочлены будут иметь по 37 корней, то по теореме Виета эта сумма равна сумме всех этих корней с обратным знаком. Следовательно, среди корней будут неположительные.

6. **а**) [4] Есть неограниченный набор карточек со словами “*abc*”, “*bca*”, “*cab*”. Из них составляют слово по такому правилу. В качестве начального слова выбирается любая карточка, а далее на каждом шаге к имеющемуся слову можно либо приклеить карточку слева или справа, либо разрезать слово в любом месте (между буквами) и вклеить карточку туда. Можно ли так составить палиндром?

б) [6] Есть неограниченный набор красных карточек со словами “*abc*”, “*bca*”, “*cab*” и синих карточек со словами “*cba*”, “*acb*”, “*bac*”. Из них по тем же правилам составили палиндром. Верно ли, что было использовано одинаковое количество красных и синих карточек? (*А. Грибалко, И. Митрофанов*)

Ответ. **а**) Нельзя; **б**) верно.

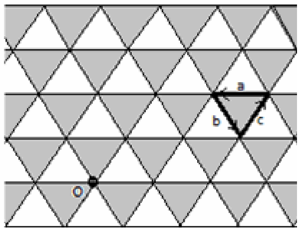
Решение 1. Будем рассматривать всевозможные пары букв, входящих в слово. Назовём пары $a\ldots b$, $b\ldots c$ и $c\ldots a$ *хорошими*, пары $a\ldots c$, $c\ldots b$ и $b\ldots a$ – *плохими*.

а) Рассмотрим, как меняется число пар при добавлении одной карточки. Внутри этой карточки есть две хорошие и одна плохая пары. Поскольку вставляются три разных буквы «в одно место», то с каждой из имевшихся уже букв они образуют три новые пары: нейтральную, хорошую и плохую. Отсюда ясно, что число хороших пар всегда больше числа плохих. А в палиндроме их должно быть поровну из-за симметрии слова.

б) Как показано в а), каждая красная карточка увеличивает разность между числом хороших и плохих пар на единицу, а каждая синяя – уменьшает на единицу. Поскольку в палиндроме число хороших пар равно числу плохих, то и число красных карточек равно числу синих.

Замечание. В п. а) можно рассматривать только пары соседних букв.

Решение 2. Рассмотрим на плоскости треугольную решётку из равных треугольников, раскрасим её в шахматном порядке, и выберем на ней стартовый узел O. Сопоставим буквам a, b, c сдвиг на единичные векторы в трёх направлениях (см. рис.) и будем рассматривать слово как описание пути, начинающегося в точке O. При этом любая из троек *abc*, *bca*, *cab* добавляет в путь обход вокруг тёмного треугольника, а из троек *acb*, *cba*, *bac* – вокруг светлого. Путь по-прежнему остаётся замкнутым, хотя некоторые рёбра, возможно, проходятся несколько раз. Если замкнутый путь оказался палиндромом, то первое и последнее ребро совпадают по направлению, но одно начинается в O, а другое в O заканчивается. Значит, соответствующие отрезки центрально симметричны относительно O. Точно так же центрально симметричны второй и предпоследний отрезки пути, и т. д. Так и весь путь оказывается центрально симметричным.



Подсчитаем *ориентированную площадь*, охватываемую замкнутой ломаной. Выберем O за начало координат. Тогда если AB и CD – центрально симметричные отрезки, а векторы AB и CD сонаправлены, то сумма ориентированных площадей OAB и OCD равна 0. Значит, и общая ориентированная площадь равна 0.

Пусть площадь каждого треугольника решетки равна 1. Тогда треугольники первого типа дают вклад 1, а второго типа – вклад –1. Значит, а) в палиндроме использованы карточки обоих типов, и б) карточек обоих типов поровну.

7. На сферической планете с длиной экватора 1 планируют проложить N кольцевых дорог, каждая из которых будет идти по окружности длины 1. Затем по каждой дороге запустят несколько поездов. Все поезда будут ездить по дорогам с одной и той же положительной постоянной скоростью, никогда не останавливаясь и не сталкиваясь. Какова в таких условиях максимально возможная суммарная длина всех поездов? Поезда считайте дугами нулевой толщины, из которых выброшены концевые точки. Решите задачу в случаях:

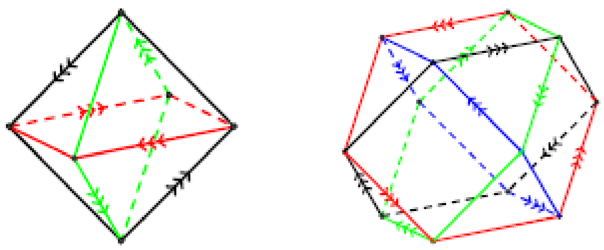
а) [4] $N = 3$;

б) [6] $N = 4$. (*А. Бердников*)

Ответ. **а**) 1,5; **б**) 2. **Решение**. *Оценка*. Возьмём любые две дороги – большие окружности на сфере. Они пересекаются в некоторой точке-узле. Мысленно повернём одну из этих дорог относительно диаметра, содержащего узел, чтобы совпали дороги и направления движения на них. Если в этом эксперименте поезда-дуги пересекутся, то через некоторое время они на самом деле пересекутся в узле, что запрещено. Поэтому сумма длин поездов на этих дорогах не больше 1.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – суммы длин поездов на n дорогах. Складывая все неравенства вида $a_i + a_j \le 1$, где $1 \le i < j \le n$, получим $(n-1)(a_1 + \ldots + a_n) \le {}^1/_2\, n(n-1)$, то есть $a_1 + \ldots + a_n \le {}^n/_2$, что и анонсировалось.

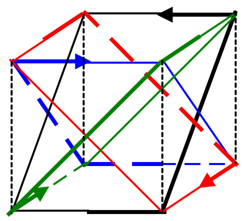
Пример. **Первый способ**.



На рисунках изображены «проекции» планов дорог на вписанные в сферу: **а**) октаэдр (слева); **б**) кубоктаэдр (справа). Каждая дорога выделена своим цветом. Рёбра со стрелками – поезда.

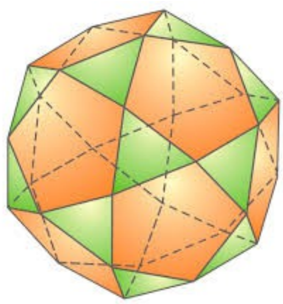
(Кубоктаэдр получается из куба соединением середин всех соседних рёбер. Таким образом, проекции дорог – это правильные шестиугольники – сечения бывшего куба).

Второй способ. **б**) Рассмотрим правильную четырёхугольную призму, вписанную в данную сферу. Каждая дорога – сечение сферы плоскостью, проходящей через одно из ребер основания и противоположное ребро другого основания призмы. На каждой дороге разместим по одному поезду длины ${}^1/_2$. На рисунке изображены «проекции» дорог и поездов на поверхность призмы (каждой дороге соответствует свой цвет).



а) Достаточно убрать одну из дорог, построенных в п. б).

Замечание 1. Как и в первом способе из икосаэдра (или додекаэдра) можно вырезать икосододекаэдр (см. рис.) и так же расставить поезда, получив пример с шестью дорогами.



Замечание 2. Более интересный вопрос – можно ли добиться сколь угодно большой суммарной длины поездов, если разрешается использовать сколь угодно большое число дорог. Ответ положительный. Интересно также получить точную оценку суммарной длины поездов, если всего дорог N.