

35-й Международный математический Турнир городов 2013/14 учебный год

Решения задач весеннего тура

Подготовлены Л. Медниковым и А. Семёновым

Базовый тур, 8-9 классы

1. [3] Даны 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число ещё раз увеличили на 1. Изменится ли сумма квадратов на этот раз, и если да, то на сколько? (А.В.Шаповалов)

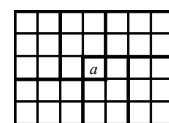
Ответ. Увеличится на 200. **Решение.** $(a + 2)^2 - (a + 1)^2 = (a + 1)^2 - a^2 + 2$. Поэтому второе изменение на $2 \cdot 100$ больше первого.

2. [4] Мама испекла одинаковые с виду пирожки: 7 с капустой, 7 с мясом и один с вишней, и выложила их по кругу на круглое блюдо именно в таком порядке. Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. Оля знает, как лежали пирожки, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Оле наверняка добиться этого, надкусив не больше трёх невкусных пирожков? (А. В. Хачатурян)

Решение. Если первый надкушенный пирожок окажется с мясом, то вкусный пирожок находится в группе следующих по кругу семи пирожков, если же с капустой, то в группе предыдущих. В любом случае в этой группе пирожки идут в порядке мясо-вишня-капуста. Оле нужно надкусить центральный пирожок в этой группе. Если он с мясом, то вкусный пирожок находится в тройке следующих пирожков, если с капустой, то в тройке предыдущих. Надкусив центральный пирожок в этой тройке, Оля таким же образом узнает, какой из пирожков вкусный. Значит, если за три надкусывания Оле не попался вкусный пирожок, то в четвертый раз она уже точно может съесть его.

3. [4] Клетки таблицы 7×5 заполнены числами так, что в каждом прямоугольнике 2×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел равна нулю. Заплатив 100 рублей, можно выбрать любую клетку и узнать, какое число в ней записано. Какого наименьшего числа рублей хватит, чтобы наверняка определить сумму всех чисел таблицы? (Е. В. Бакаев)

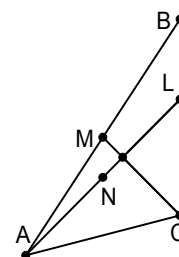
Ответ. 100 рублей. **Решение.** Пусть в центральной клетке таблицы написано число a . Тогда сумма S всех чисел таблицы равна $-a$, поскольку сумму $S + a$ можно разбить на шесть нулевых сумм по шесть слагаемых так, как показано на рисунке. Следовательно, достаточно узнать одно число – центральное.



С другой стороны, таблица, заполненная числами a и $-a$ в шахматном порядке, удовлетворяет условию задачи. Значит, сумма $S = -a$ может быть любой, и хотя бы одно число узнать нужно.

4. [5] На стороне BC треугольника ABC выбрана точка L так, что AL в два раза больше медианы CM . Оказалось, что угол ALC равен 45° . Докажите, что AL и CM перпендикулярны. (Р. Г. Женодаров)

Решение. Пусть N – середина отрезка AL . Тогда MN – средняя линия треугольника BAL . Поэтому $LMNC$ – трапеция (или параллелограмм) с равными диагоналями, то есть равнобедренная трапеция (или прямоугольник). Один из углов между ее диагоналями LN и CM в два раза больше угла NLC , то есть равен 90° .



5. [6] На переправу через пролив Босфор выстроилась очередь: первый Али-Баба, за ним 40 разбойников. Лодка одна, в ней могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Среди плывущих в лодке не должно быть людей, которые не дружат между собой. Смогут ли все они переправиться, если каждые двое рядом стоящих в очереди – друзья, а Али-Баба ещё дружит с разбойником, стоящим через одного от него?

(А. В. Шаповалов)

Ответ. Смогут.

Первое решение. Занумеруем всех разбойников в порядке очереди. Сначала переправляются Али-Баба и первые два разбойника, 2-й остается, а Али-Баба с 1-м возвращаются. Затем 3-й разбойник переправляется с 4-м и возвращается со 2-м (произошла замена 2-го на 4-го). Потом 5-й меняет 4-го на 6-го и т.д. Наконец, на том берегу окажется 40-й, а остальные с лодкой – еще на этом.

Забудем про 40-го разбойника и с помощью той же процедуры (со сменой чётности) переправим на тот берег 39-го. И т. д.

Второе решение. За пять рейсов можно переправить *основную четверку* (Али-Бабу и первых трёх разбойников): сначала переправляются Али-Баба и первые два разбойника, затем 1-й и 2-й возвращаются, переправляются 2-й и 3-й разбойник, и наконец Али-Баба со 2-м возвращаются и забирают 1-го.

После этого 2-й и 3-й возвращаются, переправляются 39-й и 40-й, и Али-Баба с 1-м возвращаются. Итак, за 8 рейсов переправились последние два разбойника. За следующие 8 рейсов аналогично переправляются 37-й и 38-й, и т.д.

Когда на исходном берегу останутся Али-Баба и первые 4 разбойника, снова переправляется основная четверка, 2-й и 3-й возвращаются, переправляются 3-й и 4-й, и Али-Баба с 1-м возвращаются за 2-м.

Замечание. Способ из второго решения гораздо выгоднее: требуется всего 153 рейса, а при первом способе – более 800.

Базовый тур, 10-11 классы

1. [4] У Чебурашки есть набор из 36 камней массами 1 г, 2 г, ..., 36 г, а у Шапокляк есть суперклей, одной каплей которого можно склеить два камня в один (соответственно, можно склеить 3 камня двумя каплями и так далее). Шапокляк хочет склеить камни так, чтобы Чебурашка не смог из получившегося набора выбрать один или несколько камней общей массой 37 г. Какого наименьшего количества капель клея ей хватит, чтобы осуществить задуманное? (Е. В. Бакаев)

Ответ. 9 капель. *Пример.* Склеив попарно камни с массами 1 и 18, 2 и 17, ..., 9 и 10, Шапокляк получит набор, в котором каждый камень весит от 19 до 36 г, поэтому одного камня Чебурашке будет мало, а двух – уже много.

Другой способ. Склеив попарно все камни с нечётными массами, Шапокляк получит набор, в котором все камни будут иметь чётные массы, и составить нечётную массу Чебурашка не сможет.

Оценка. Если Шапокляк использует только 8 капель, то в склейках будут участвовать не больше 16 исходных камней. Поэтому хотя бы одна из 18 пар $\{1, 36\}$, $\{2, 35\}$, ..., $\{18, 19\}$ окажется “нетронутой”, и Чебурашка сможет выбрать ее.

2. [4] В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны. На сторонах AD и CD отмечены соответственно точки M и N так, что углы ABN и CBM прямые. Докажите, что прямые AC и MN параллельны. (А. А. Полянский)

Решение. Достаточно доказать, что $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{ND}$.

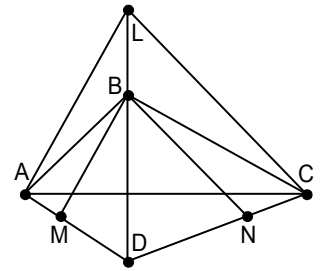
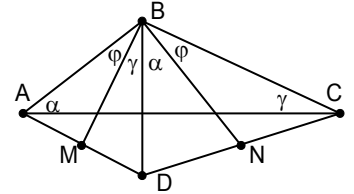
1-й способ. Заметим, что $\angle BAC = \angle DBN$, $\angle BCA = \angle DBM$, $\angle ABM = \angle CBN$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами); обозначим эти углы α , γ и φ .

Имеем $\frac{AM}{MD} = \frac{S_{ABM}}{S_{MBD}} = \frac{AB \sin \varphi}{BD \sin \gamma}$. Аналогично, $\frac{CN}{ND} = \frac{BC \sin \varphi}{BD \sin \alpha}$.

Осталось заметить, что $\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \alpha}$ по теореме синусов для треугольника ABC .

2-й способ. Проведем через точки A и C прямые, параллельные MB и NB соответственно. Они пересекутся в точке L . Тогда прямые CB и AB будут высотами в треугольнике ALC . Значит, прямая LB – тоже высота. Следовательно, точка L лежит на прямой BD .

Поэтому $\frac{AM}{MD} = \frac{BL}{BD} = \frac{CN}{ND}$.



3. [5] На переправу через пролив Босфор выстроилась очередь: первый Али-Баба, за ним 40 разбойников. Лодка одна, в ней могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Среди плывущих в лодке не должно быть людей, которые не дружат между собой. Смогут ли все они переправиться, если каждые двое рядом стоящих в очереди – друзья, а Али-Баба ещё дружит с разбойником, стоящим через одного от него? (А. В. Шаповалов)

Ответ. Смогут.

Первое решение. Занумеруем всех разбойников в порядке очереди. Сначала переправляются Али-Баба и первые два разбойника, 2-й остается, а Али-Баба с 1-м возвращаются. Затем 3-й разбойник переправляется с 4-м и возвращается со 2-м (произошла замена 2-го на 4-го). Потом 5-й меняет 4-го на 6-го и т.д. Наконец, на том берегу окажется 40-й, а остальные с лодкой – еще на этом.

Забудем про 40-го разбойника и с помощью той же процедуры (со сменой чётности) переправим на тот берег 39-го. И т. д.

Второе решение. За пять рейсов можно переправить основную четверку (Али-Бабу и первых трёх разбойников): сначала переправляются Али-Баба и первые два разбойника, затем 1-й и 2-й возвращаются, переправляются 2-й и 3-й разбойник, и наконец Али-Баба со 2-м возвращаются и забирают 1-го.

После этого 2-й и 3-й возвращаются, переправляются 39-й и 40-й, и Али-Баба с 1-м возвращаются. Итак, за 8 рейсов переправились последние два разбойника. За следующие 8 рейсов аналогично переправляются 37-й и 38-й, и т.д.

Когда на исходном берегу останутся Али-Баба и первые 4 разбойника, снова переправляется основная четверка, 2-й и 3-й возвращаются, переправляются 3-й и 4-й, и Али-Баба с 1-м возвращаются за 2-м.

Замечание. Способ из второго решения гораздо выгоднее: требуется всего 153 рейса, а при первом способе – более 800.

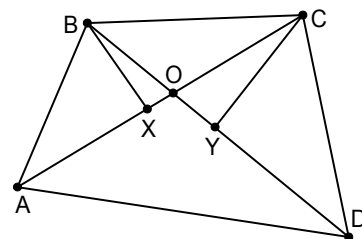
4. [5] Натуральные числа a , b , c , d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству $ab + cd = ac - 10bd$. Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других. (Б. Р. Френкин)

Решение. Запишем равенство в виде $a(c - b) = d(c + 10b)$. Так a и d взаимно просты, $c - b$ делится на d : $c - b = md$. Подставив, получим $ma = c + 10b = md + 11b$, то есть

$m(a - d) = 11b$. Аналогично, $a - d = nb$, $n(c - b) = 11d$. Перемножив, получим $121bd = mn(ac - ab - cd + bd) = 11mnbd$. Отсюда $mn = 11$. Следовательно, либо m , либо n равно 1. В первом случае $c = b + d$, во втором — $a = b + d$.

5. [5] Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пешеход Петя выходит из вершины A , идёт по стороне AB и далее по контуру четырёхугольника. Пешеход Вася выходит из вершины A одновременно с Петей, идёт по диагонали AC и одновременно с Петей приходит в C . Пешеход Толя выходит из вершины B в тот момент, когда её проходит Петя, идёт по диагонали BD и одновременно с Петей приходит в D . Скорости пешеходов постоянны. Могли ли Вася и Толя прийти в точку пересечения диагоналей O одновременно? (Б. Р. Френкин)

Ответ. Не могли. **Первое решение.** Пусть Петя приходит в вершину B в то же время, когда Вася проходит точку X диагонали AC , а в точку C , когда Толя проходит точку Y диагонали BD . Тогда $AB:BC = AX:XC$, $BC:CD = BY:YD$. Значит, BX и CY — биссектрисы углов B и C четырёхугольника. Если Вася с Толей встретились в точке O , то $XO:OC = BO:OY$, откуда следует параллельность прямых BX и CY . Но тогда сумма углов B и C четырёхугольника равна $2(\angle XBC + \angle YCB) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Противоречие.



Второе решение. Рассмотрим путь от A до C (от B до D), получим, что скорость Пети больше скорости Васи (Толи). Предположим, что Вася с Толей встретились в точке O . Петя в этот момент был в некоторой точке Z стороны BC . Из неравенств скоростей следует, что $BO < BZ$ и $OC < ZC$. Но тогда $BO + OC < BZ + ZC = BC$, что противоречит неравенству треугольника.

Сложный тур, 8-9 классы

1. [3] Дед Мороз раздал детям 47 шоколадок так, что каждая девочка получила на одну шоколадку больше, чем каждый мальчик. Затем дед Мороз раздал тем же детям 74 мармеладки так, что каждый мальчик получил на одну мармеладку больше, чем каждая девочка. Сколько всего было детей? (Е. В. Бакаев)

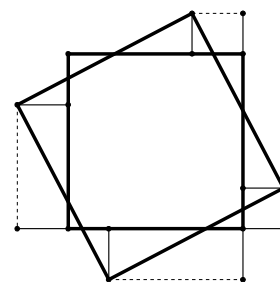
Ответ. 11 или 121. **Решение.** Всего была роздана 121 сладость, причём все дети получили поровну. Значит, количество детей — делитель 121, то есть 1, 11 или 121.

Первый случай, очевидно, не подходит. Во втором случае 8 мальчиков получили по 4 шоколадки и 7 мармеладок, а 3 девочки — по 5 шоколадок и 6 мармеладок. В третьем случае 47 девочек получили по шоколадке, а 74 мальчика — по мармеладке.

2. [5] На клетчатой доске 5×5 Петя отмечает несколько клеток. Вася выигрывает, если сможет накрыть все эти клетки неперекрывающимися и не выходящими за границу квадрата уголками из трёх клеток (уголки разрешается класть только «по клеточкам»). Какое наименьшее число клеток должен отметить Петя, чтобы Вася не смог выиграть? (А. В. Шаповалов)

Ответ. 9 клеток. **Решение.** *Пример.* Петя может отметить клетки, указанные на рисунке слева. Тогда Вася не сможет одним уголком накрыть больше одной отмеченной клетки. Но 9 уголков без наложений не разместить на доске, так как $27 > 25$.

Оценка. Если Петя отметит меньше 9 клеток, то хотя бы одна из указанных в примере чёрных клеток не будет отмечена. Тогда Вася сможет накрыть все клетки доски, кроме неё. Действительно, на рисунке справа заштрихованные клетки можно дополнить до углов так, чтобы свободной оказалась только одна из клеток 1, 2 или 3. Если нужно исключить другую чёрную клетку, рисунок нужно повернуть.



3. [6] На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, её размеры могут отличаться от размеров стола.) (*Е. В. Бакаев*)

Решение 1. Назовём *весом* свисающего треугольного куска длину его высоты, проведённой из прямого угла. Очевидно, все свисающие куски подобны между собой. Значит, равенство кусков равносильно равенству их *весов*. Поэтому достаточно показать равенство сумм *весов* противоположных кусков. Добавляя к этим суммам сторону стола, получаем проекции диагоналей скатерти на стороны стола. Так как диагонали равны и перпендикулярны, и стороны стола перпендикулярны, то эти проекции равны. Итак, два других куска тоже равны.

Решение 2. Запишем цепочку равносильных утверждений для данного в условии расположения.

- 1) Равенство соседних кусков.
- 2) Совместимость этих кусков поворотом скатерти на 90° вокруг её центра.
- 3) Совместимость этим поворотом двух прямых, содержащих стороны стола и стороны рассматриваемых кусков.
- 4) Равноудаленность этих прямых от центра скатерти.
- 5) Принадлежность центра скатерти диагонали стола – биссектрисе угла между этими прямыми.

Приведённая цепочка показывает равносильность равенства соседних кусков равенству двух других кусков.

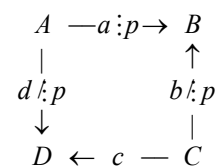
4. [7] Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по натуральному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим отрубят головы; иначе из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не сговариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков? (*И. И. Богданов*)

См. решение задачи 3 для ст. классов.

5. [7] Дано несколько белых и несколько чёрных точек. От каждой белой точки идёт стрелка в каждую чёрную, на каждой стрелке написано натуральное число. Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту из стрелок, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения. Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на её концах? (*А. А. Пахарев*)

Ответ. Обязательно. **Решение.** Поставим в каждой точке число 1. Пусть для какой-то точки числа на всех стрелках с концом в этой точке (входящих, если точка чёрная, или

выходящих, если она белая) имеют общий простой делитель $p > 1$. Тогда домножим число в этой точке на p , а все числа на этих стрелках поделим на p . Заметим, что для каждой стрелки эта операция не меняет произведения трёх чисел: на стрелке и в обоих её концах, оно останется равным исходному числу на стрелке. Будем выполнять такие операции, пока возможно. Когда-нибудь процесс остановится, поскольку уменьшается произведение всех чисел на стрелках. Предположим, что в этот момент на какой-то стрелке стоит число $a \neq 1$. Возьмём любой простой делитель p числа a . Для каждого из концов этой стрелки найдётся стрелка с этим концом, число на которой не делится на p . Получается приведённая справа картинка. Для этого замкнутого маршрута должно выполняться равенство $(AaB)(CcD) = (BbC)(DdA)$, то есть $ac = bd$, что невозможно. Значит, на всех стрелках уже стоит 1. Следовательно, для каждой стрелки произведение итоговых чисел на её концах равняется исходному числу на ней.



6. [9] Из кубиков $1 \times 1 \times 1$ склеен куб $3 \times 3 \times 3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

- со стороны любой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета – видны 9 кубиков фигуры);

- переходя в фигуре от кубика к кубика через их общую грань, можно от любого кубика добраться до любого другого? (А. А. Марачев)

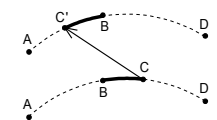
Ответ. 14 кубиков. **Решение.** *Пример.* Слои от нижнего к верхнему показаны на рисунке. Оставленные 13 кубиков отмечены чёрным. В каждом слое есть кубики во всех столбцах и строках. При наложении слоёв получается чёрный квадрат 3×3 . Поэтому первое условие выполнено. Нижний и средний слои связаны и склеиваются центральными кубиками. Каждый кубик верхнего слоя склеен с соответствующим кубиком среднего слоя. Значит, и второе условие выполнено.



Оценка. Пусть осталось n кубиков. Мы видим $6 \cdot 9$ их граней. Для связности необходима хотя бы $n - 1$ склейка. Значит, еще хотя бы $2n - 2$ граней мы не видим. Поэтому $2n - 2 + 54 \leq 6n$, откуда $n \geq 13$.

7. [9] На окружности отмечены 10 точек, занумерованные по часовой стрелке: A_1, A_2, \dots, A_{10} , причём известно, что их можно разбить на пары симметричных относительно центра окружности. Изначально в каждой отмеченной точке сидит по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает вдоль окружности через своего соседа так, чтобы расстояние между ними не изменилось. При этом нельзя пролетать над другими кузнечиками и попадать в точку, где уже сидит кузнечик. Через некоторое время оказалось, что какие-то девять кузнечиков сидят в точках A_1, A_2, \dots, A_9 , а десятый кузнечик сидит на дуге $A_9A_{10}A_1$. Можно ли утверждать, что он сидит именно в точке A_{10} ? (Е. В. Бакаев)

Ответ. Можно. **Решение.** Десять кузнечиков разбивают окружность на 10 дуг. Покрасим эти дуги поочередно в чёрный и белый цвета. Изначально суммы длин чёрных и белых дуг равны, поскольку дуга, симметричная чёрной дуге относительно центра, – белая, и наоборот. Из рисунка видно, что прыжок кузнечика не меняет указанные суммы. В конечной расстановке мы знаем четыре чёрные дуги, знаем, куда откладывать пятую, следовательно, позиция 10-го кузнечика однозначна. С другой стороны, как мы уже показывали, нахождение его в A_{10} нам подходит.



Сложный тур, 10-11 классы

1. [3] Незнайка хвастается, что написал в ряд несколько единиц, поставил между каждыми соседними единицами знак “+” или “×”, расставил скобки и получил выражение, значение которого равно 2014; более того, если в этом выражении заменить одновременно все знаки “+” на знаки “×”, а знаки “×” на знаки “+”, все равно получится 2014. Может ли он быть прав? (В. А. Клепцын)

Ответ. Может. **Решение.** Он мог написать $2 \cdot 2013 + 1$ единиц и расставить на любые 2013 мест знаки «+», а на остальные 2013 – знаки «×». В любом случае значение выражения равно 2014, и произвольная перестановка знаков его не изменит.

2. Верно ли, что любой выпуклый многоугольник можно по прямой разрезать на два меньших многоугольника с равными периметрами и

а) [4] равными наибольшими сторонами?

б) [4] равными наименьшими сторонами? (А. В. Шаповалов)

а) **Ответ.** Верно. **Решение.** Каждой точке X границы многоугольника соответствует «противоположная» точка X' : эти две точки разбивают периметр многоугольника пополам. Следовательно, точкой X однозначно определяются прямая разбиения XX' и два многоугольника равных периметров – *правый* R_X (справа от луча XX') и *левый* L_X . То, что получаются именно многоугольники, следует из выпуклости и неравенства многоугольника.

Занумеруем стороны многоугольника. Для каждой точки X границы пусть $d_i(X)$ – длина куска i -й стороны, входящего в R_X (если вся сторона попала в L_X , то $d_i(X) = 0$); $d_0(X)$ – длина отрезка XX' . Очевидно, все функции $d_0(X), d_1(X), d_2(X), \dots$ непрерывны. Но тогда непрерывна и функция $d_R(X) = \max \{d_0(X), d_1(X), d_2(X), \dots\}$, а это как раз длина наибольшей стороны многоугольника R_X .

Аналогично непрерывна функция $d_L(X)$ – длина наибольшей стороны многоугольника L_X . Непрерывная функция $d_R(X) - d_L(X)$ в точках A и A' принимает противоположные значения. Поэтому найдётся точка X , в которой $d_R(X) - d_L(X) = 0$, что и требовалось.

б) **Ответ.** Неверно. **Решение.** Покажем, что это нельзя сделать для треугольника ABC с длинами сторон 9, 10, 11. Его полупериметр равен 15, а площадь (по формуле Герона) равна $30\sqrt{2} > 40$. Значит, наименьшая из высот этого треугольника больше 7.

Пусть разрез проходит через одну из вершин. Тогда длина разреза больше 7, а отрезки, на которые он делит противоположную сторону не больше $15 - 9 = 6$. Значит, они и являются наименьшими сторонами двух полученных треугольников. Но эти отрезки, очевидно, не равны.

Пусть разрез XX' не проходит через вершину. Тогда в получившемся четырёхугольнике наименьшая сторона (пусть AX) не превосходит $(15 - 9):2 = 3$. Рассмотрим стороны получившегося треугольника, лежащие на сторонах исходного. Меньшая из них больше $15 - 11 = 4$. Длина разреза $XX' > AX' - AX > 7 - 3 = 4$. Итак, наименьшая сторона четырёхугольника меньше наименьшей стороны треугольника.

Замечание. Для примера годится любой треугольник с различными, но достаточно близкими по длине сторонами.

3. [6] Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по положительному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим

отрубят головы; иначе из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не сговариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков? (И. И. Богданов)

Решение. Докажем что можно ограничиться потерей 101 волоска у каждого мудреца. Пусть первый напишет на карточках числа $1, 2, 4, \dots, 2^{99}$, а второму сообщит эти числа и их сумму. Второй, услышав число 1, поймёт, что есть карточка, не превосходящая 1. Услышав очередное число 2^k , он поймёт, что есть ещё одна карточка, не превосходящая 2^k , поскольку сумма оценённых уже карточек не превосходит $1 + 2 + \dots + 2^{k-1} < 2^k$. Когда он услышит $2^{100} - 1$, он уже будет знать, что сумма 100 карточек не больше этого числа. Значит, это и есть сумма, все оценки превращаются в равенства, и второй определит все карточки.

Теперь докажем, что 100 волосков недостаточно. Пусть второму сообщены 100 различных чисел, и $a < b$ – два из них. Тогда все услышанные числа могут быть написаны на карточках. Но кроме этого набора карточек подойдёт и набор с числом $b - a$ вместо b .

Замечание. В примере можно использовать любой набор карточек, в котором каждая следующая карточка больше суммы всех предыдущих.

4. [7] Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена? (Г. К. Жуков)

Ответ. 20 точек. **Решение.** Пример. $x(x-1)(x-2)\dots(x-19)$.

Оценка. Пусть нашлись такие многочлен $P(x)$ и 21 точка с абсциссами $x_1 < \dots < x_{21}$.

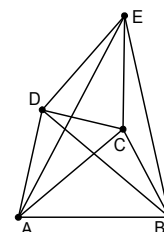
По аналогу теоремы Безу для многочленов с целыми коэффициентами число $|P(x_{21}) - P(x_i)| \leq 10$ делится на $x_{21} - x_i \geq 11$ при всех i от 0 до 10. Отсюда $P(x_{21}) - P(x_i) = 0$.

Аналогично рассмотрев x_k и x_1 , где $12 \leq k \leq 21$, получим в итоге, что $P(x_i) = P(x_{21}) = P(x_1) = P(x_k) = C$. Итак, мы знаем 20 корней многочлена $P(x) - C$ степени 20. Значит, $P(x) - C = a(x-x_1)\dots(x-x_{10})(x-x_{12})\dots(x-x_{21})$, где a – старший коэффициент $P(x)$. Тогда $|P(x_{11}) - C| \geq 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10 > 10$. Это противоречит тому, что C и $P(x_{11})$ принадлежат отрезку $[0, 10]$.

5. [8] Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит её по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выиграет, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)? (К. А. Кноп)

Ответ. За 5 ходов. **Решение.** За 4 хода Пете не выиграть, поскольку Вася может покрасить каждым цветом по две точки.

Покажем, как выиграть за 5 ходов. Отметим три точки A, B, C , образующие треугольник, подобный данному. Если Вася покрасит их в один цвет, то он уже проиграл. Поэтому можно считать, что Вася покрасил точки A и B в красный цвет, а C – в синий. Отметим точки D и E по ту же сторону от AB , что и C так, чтобы были подобны треугольники ABC, BDA и EAB . Если хоть одна из точек D и E красная, то Петя уже выиграл. Осталось показать, что треугольники EDC и EAB подобны. Можно считать, что получился приведённый рисунок. Тогда из равенства углов подобных треугольников следует, что равны углы DAE и CBE . Кроме того, $DA:BC = AB:CA = EA:BE$. Значит, треугольники DAE и CBE подобны. Отсюда в треугольниках EDC и EAB углы E равны, и $DE:CE = AE:BE$, следовательно, они подобны.

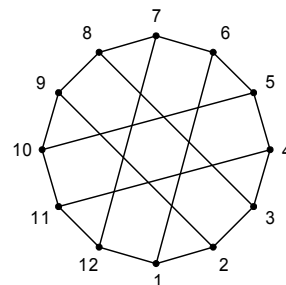


Замечание. То же можно изложить на языке комплексных чисел.

После того, как Вася покрасил точки A и B в красный, а C – в синий цвет, рассмотрим комплексную плоскость, на которой C, A, B являются точками $0, z, z^2$ соответственно (нетрудно проверить, что нужное комплексное число z найдётся). Добавим последовательно точки w (E) и wz (D), где $w = z^2 - z + 1$. Тогда треугольники CAB, ABD, BEA и CED подобны. Действительно, треугольники CAB и CED получаются из треугольника Δ с вершинами $0, 1, z$ умножением соответственно на z и w ; треугольник BEA получается из Δ умножением на $1 - z$ и сдвигом на z^2 , а треугольник ABD получается из Δ умножением на $z^2 - z$ и сдвигом на z .

6. [9] Каждому городу в некоторой стране присвоен индивидуальный номер. Имеется список, в котором для каждой пары номеров указано, соединены города с данными номерами железной дорогой или нет. Оказалось, что, какие ни взять два номера M и N из списка, можно так перенумеровать города, что город с номером M получит номер N , но список по-прежнему будет верным. Верно ли, что, какие ни взять два номера M и N из списка, можно так перенумеровать города, что город с номером M получит номер N , город с номером N получит номер M , но список по-прежнему будет верным?
(А. А. Пахарев, М. Б. Скопенков, А. В. Устинов)

Ответ. Неверно. **Решение.** Рассмотрим страну из 12 городов, соединённых дорогами так, как показано на рисунке. Заметим, что рисунок симметричен относительно каждого диаметра, проходящего через середины малых хорд окружности, на которой лежат все города. Этими симметриями мы можем менять номерами любую пару соседних по кругу городов. А с помощью нескольких симметрий каждый номер можно перевести в любой другой, то есть условие выполнено. Предположим, что нам удалось поменять номерами города 1 и 3 с сохранением списка соседних городов. Тогда их единственный общий сосед 2 обязан сохранить свой номер. Оставшемуся соседу 9 города 2 тоже придётся сохранить номер. Но у городов 3 и 9 два общих соседа (2 и 8), а у 1 и 9 – только один. Противоречие.



Замечание. Этот пример, конечно, не единственный. Например, если у правильного тетраэдра срезать вершины, получится другой граф с 12 вершинами и 18 ребрами, также обладающий нужными свойствами.

7. [10] Многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям: $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x)$, где $Q(x)$ – некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x) + 1)^{100}$ равен нулю. (Д. А. Звонкин)

Решение. Будем говорить, что два многочлена сравнимы по модулю x^{100} , если у них совпадают коэффициенты при всех степенях от нулевой до 99-й. Так $(P(x))^2 \equiv 1 + x \pmod{x^{100}}$.

Сумма $(P(x) + 1)^{100} + (P(x) - 1)^{100}$ есть многочлен 50-й степени от $(P(x))^2$. Значит, она сравнима по модулю x^{100} с многочленом 50-й степени. В частности, коэффициент при x^{99} равен нулю. Это значит, что коэффициенты при x^{99} в многочленах $(P(x) + 1)^{100}$ и $(P(x) - 1)^{100}$ равны по модулю, но отличаются знаком.

Но $P(x) - 1$ делится на x . Следовательно, $(P(x) - 1)^{100}$ делится на x^{100} , и коэффициент при x^{99} равен нулю.

<http://www.ashap.info/Turniry/TG/index.html>