ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, базовый вариант, 7 октября 2012 г.

Решения писали Л.Медников и А.Шаповалов

8-9 классы

1.**1**. [3] Про группу из пяти человек известно, что

Алеша на 1 год старше Алексеева,
Боря на 2 года старше Борисова,
Вася на 3 года старше Васильева,
Гриша на 4 года старше Григорьева,
а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев.

Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев? *(Е. Бакаев)*

Решение. Сумма возрастов Алеши, Бори, Васи, Гриши и Димы равна сумме возрастов Алексеева, Борисова, Васильева, Григорьева и Дмитриева. Значит, Дмитриев старше Димы на $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ лет.

1.**2**. [4] Пусть $C(n)$ – количество различных простых делителей числа n. (Например, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$.) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$? *(Г. Жуков)*

Ответ. Бесконечно. Например, подходят все пары вида $(2^n, 2^{n+1})$. Здесь $C(a) = 1$, $C(b) = 1$, $C(a + b) = C(3\cdot 2^n) = 2$.

1.**3**. [5] Таблица 10×10 заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам? *(А. Эвнин)*

Решение. Сумма всех чисел таблицы равно числу пар, состоящих из соседних заминированной и незаминированной клеток. При указанной операции эти пары сохраняются, поэтому сумма *не меняется*.

1.**4**. [5] Окружность касается сторон AB, BC, CD параллелограмма $ABCD$ в точках K, L, M соответственно. Докажите, что прямая KL делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины C на AB. *(П. Кожевников)*

Решение 1. Пусть CH – указанная высота, N – её точка пересечения с прямой KL. Ясно, что KM – диаметр окружности, а $CHKM$ – прямоугольник. Пусть O – центр окружности, r – ее радиус, тогда $KM = CH = 2r$. Достаточно доказать, что $HN = r$. Пусть $\angle C = 2\alpha$. Поскольку CO – биссектриса угла C, то $\angle MCO=\alpha$. В равнобедренном треугольнике BLK $\angle B = 180° - 2\alpha$, поэтому $\angle BLK = \alpha$. Прямоугольные треугольники KNH и COM равны по катету и острому углу. Но тогда $HN = MO = r$.

Решение 1а. Пусть CH – указанная высота, N – её точка пересечения с прямой KL. Ясно, что KM – диаметр окружности, а $CHKM$ – прямоугольник. Пусть O – центр окружности. Высота CH равна диаметру, поэтому достаточно доказать, что $CN = OK$. Поскольку CO – биссектриса угла C равнобедренного треугольника LCM, то $CO \perp LM$. Но и прямая LK перпендикулярна LM, следовательно, $CNKO$ – параллелограмм.

Решение 2. Пусть CH – указанная высота. Отложим на луче LB отрезок $LN = LC$. Ясно, что $CHKM$ – прямоугольник. Поскольку $BK = BL$ и $HK = CM = CL = NL$, то и $BH = BN$. В равнобедренных треугольниках BLK и BNH углы равны, поэтому прямая HN параллельна

KL. Следовательно, прямая KL содержит среднюю линию треугольника HCN и делит сторону CH пополам.

1.**5**. [5] В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовал хотя бы один школьник этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников принял участие по меньшей мере в $^1/_{20}$ всех экскурсий. *(Н. Верещагин)*

Решение. Пусть число экскурсий равно n. Если *бедный* школьник побывал меньше чем на $^n/_{20}$ экскурсиях, отметим эти экскурсии. Всего отмечено меньше $20\cdot{}^n/_{20} = n$ экскурсий, поэтому есть не отмеченная экскурсия. В ней бедные школьники не участвовали, что и требовалось доказать.

10-11 классы

2.1. [4] Таблица $m \times n$ заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам? *(А. Эвнин)*

Решение. Сумма всех чисел таблицы равно числу пар, состоящих из соседних заминированной и незаминированной клеток. При указанной операции эти пары сохраняются, поэтому сумма *не меняется*.

2.2. [4] Даны выпуклый многогранник и сфера, которая пересекает каждое ребро многогранника в двух точках. Точки пересечения со сферой делят каждое ребро на три равных отрезка. Обязательно ли тогда все грани многогранника:

а) [2] равные многоугольники;

б) [3] правильные многоугольники? *(Г. Гальперин)*

а) **Ответ**. Не обязательно. **Решение**. Рассмотрим правильную треугольную призму с квадратными боковыми гранями. Отметим на каждом ребре точки, делящие его на три равные части. Очевидно, эти точки равноудалены от центра призмы, то есть лежат на сфере соответствующего радиуса.

б) **Ответ**. Обязательно. **Решение**. Пусть $A_1 \ldots A_n$ – одна из граней многогранника. Все точки B_i, C_i, делящие его стороны $A_{i-1}A_i$ на три равные части, лежат на одной окружности (пересечении сферы с плоскостью грани) с центром O. Пусть $A_{i-1}A_i = 3a$, $A_iA_{i+1} = 3b$. По теореме о секущей $A_iB_i \cdot A_iC_i = A_iB_{i+1} \cdot A_iC_{i+1} \Leftrightarrow 2a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow a = b$. Значит, все стороны грани равны. Поэтому равны и все отрезки B_iC_i и равнобедренные треугольники B_iOC_i. Следовательно, равны все треугольники вида B_iOA_i, углы B_iA_iO и углы $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} = 2\angle B_iA_iO$.

2.3. [5] В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовало хотя бы четверо школьников этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников принял участие по меньшей мере в $^1/_{17}$ всех экскурсий. *(Н. Верещагин)*

Решение. Пусть число экскурсий равно n, и каждый школьник сохранил билеты со всех экскурсий, в которых участвовал. Назовем школьника *беднягой*, если он принял участие менее, чем в $^n/_{17}$ экскурсиях. Надорвем все билеты бедняг. Допустим, что в каждой экскурсии хотя бы один из билетов надорван. Тогда надорвано не менее n билетов, вклад каждого школьника меньше $^n/_{17}$ билетов, значит, бедняг больше 17. Выберем из них ровно 17. У выбранных школьников всего меньше $17 \cdot {}^n/_{17} = n$ билетов, у каждого из остальных трех – не более, чем по n билетов, поэтому всего билетов меньше $4n$. С другой стороны, на каждую из n экскурсий продано не менее 4 билетов. Противоречие.

2.4. Пусть $C(n)$ – количество различных простых делителей числа n.

а) [2] Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?

б) [3] А если при этом дополнительно требуется, чтобы $C(a + b) > 1000$? *(Г. Жуков)*

Решение. а) См. 1.2.

б) **Ответ**. Бесконечно. **Решение**. Рассмотрим число P, равное произведению $p_1p_2 \ldots p_n$ первых n простых чисел ($n > 1000$). P – наименьшее число, у которого n простых делителей. Пусть $C(P - 1) = n - k$. Рассмотрим число Q, равное произведению

k различных простых чисел, каждое из которых больше p_n и всех простых делителей числа $P-1$. Возьмем $a = Q$, $b = (P-1)Q$. Имеем $C(a) = k$, $C(b) = n$, $C(a+b) = C(PQ) = n + k$.

2.5. [5] Из 239 неотличимых на вид монет две – одинаковые фальшивые, а остальные – одинаковые настоящие, отличающиеся от фальшивых по весу. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета тяжелее – фальшивая или настоящая? Сами фальшивые монеты находить не нужно. *(К. Кноп)*

Решение. Разобьем все монеты на группы А, Б, В и Г из соответственно 30, 30, 60 и 119 монет. Сначала сравним А с Б, затем А+Б с В. Возможны 4 случая.

1) А = Б, А+Б = В. Это значит, что все 120 монет в А+Б+В – настоящие. Отложив из А+Б+В любую монету, и сравнив остальное с Г (где точно есть фальшивые монеты), узнаем требуемое.

2) А = Б, А+Б ≠ В. Тогда либо в А и в Б есть по фальшивой монете, либо все монеты в А+Б – настоящие, а В есть фальшивые (одна или две). Отложив одну монету из А, мы заведомо оставим фальшивую монету в Б + В. Сравним 119 взвешенных монет (без отложенной) с Г. Если равновесие, то фальшивые есть в Г и В, а в А+Б их нет. Поэтому результат второго взвешивания определяет соотношение весов.

Если равновесия нет, то в Г все монеты настоящие, и нужную информацию дает результат последнего взвешивания.

3) А ≠ Б, А+Б = В. Значит, в А+Б, а следовательно, и в В есть фальшивые монеты. Сравнив В с 60 монетами из Г (они – настоящие), узнаем какие монеты легче.

4) А ≠ Б, А+Б ≠ В. В А+Б фальшивые монеты точно есть, значит в В – нет, то есть там все монеты настоящие. Но тогда уже результат второго взвешивания дает нужную информацию.