Решения 33-го Международного математического Турнира городов

2011/12 учебный год

Л.Э.Медников, А.Н.Семёнов, А.В.Шаповалов

Весенний тур

Младшие классы

1. [4 очка] В ряд лежит четное число груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно все груши разложить в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более, чем на 1 г. (*А.В. Шаповалов*)

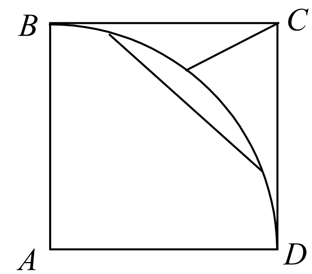
Решение. Разложим груши по возрастанию веса и докажем, что то соседние веса будут отличаться не больше чем на 1 г. Пусть это не так: есть груша веса a, а следующий вес больше $a + 1$. Покрасим груши с весом не больше a в зеленый цвет, а груши с весом больше $a + 1$ – в желтый. В исходной расстановке где-то груши разного цвета лежат рядом, значит, разность их весов меньше 1. Противоречие. ...

В первый пакет положим первую грушу с последней, во второй – вторую с предпоследней и т. д. На каждом шаге добавляются два изменения весов разных знаков, что в сумме делает разность соседних пакетов по модулю не больше максимума разностей груш, то есть, не более 1 г.

2. [4 очка] На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары и соединяет точки в каждой паре отрезком. Всегда ли он может сделать это так, чтобы каждые два отрезка пересекались? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ. Не всегда.

Решение. Приведем два контрпримера.



Пример 1. (*ММО*) Рассмотрим квадрат $ABCD$. Отметим точку C и 99 точек на дуге BD окружности с центром A (см. рис.) С какой бы отмеченной точкой мы не соединили точку C, полученный отрезок не будет пересекать *ни одну* из хорд, соединяющих остальные 98 точек.

Пример 2. Поместим на окружности 3 маленькие дуги, полученные друг из друга поворотами на 120°, отметим центр окружности и по 33 точки на каждой дуге. Отрезок из центра соединен с точкой на некоторой дуге. Он не пересечется с отрезками, чьи концы лежат на других дугах. А такие отрезки есть, так как на двух дугах точек больше, чем на одной и в центре.

3. [6 очков] В команде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N-го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N – спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая команда осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.) (*А.С. Бердников*)

Ответ. Не может.

Решение. Занумеруем сторожей в порядке убывания разряда. У сторожей жизнь делится на равные периоды сна и дежурства. При этом у каждого сторожа периоды, как минимум, втрое короче, чем у предыдущего; поэтому любой период предыдущего делится, как минимум, на три части периодами следующего, причем как минимум две из этих частей будут целыми периодами следующего. Следовательно, период сна предыдущего содержит целый период сна следующего. Так продолжая, найдём вложенный друг в друга набор периодов снов всех сторожей. В день, входящий в самый маленький из вложенных периодов сна, никто не дежурит.

4. [6 очков] В клетках таблицы $n\times n$ стоят знаки “+” и “–”. За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого этого можно добиться, сделав не более n ходов. (*А.Я. Канель-Белов*)

Решение. Заметим, что неважно, в каком порядке менять знаки, важно только, в каких рядах и сколько раз. Если в ряду поменять знаки дважды, то ничего не изменится. Поэтому достаточно менять знак не более раза в каждом ряду. Пусть удалось получить все плюсы, сменив знаки в k вертикалях и m горизонталях. Если $k + m > n$, отметим ряды, где мы меняли знаки. Знак сменился только в клетках, принадлежащих *ровно одному* отмеченному ряду. Но эти же клетки принадлежат ровно одному *неотмеченному* ряду. Поэтому результат был бы такой же, если бы мы сменили знаки в неотмеченных рядах. А их число равно $(n - k) + (n - m) = 2n - (k + m) < n$ – как раз то, что надо.

5. [8 очков] Пусть p – простое число. Набор из $p + 2$ натуральных чисел (не обязательно различных) назовем “интересным”, если сумма любых p из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все “интересные” наборы. (*А.А. Полянский*)

Ответ. Наборы видов $(pm, m, \ldots, m)$ и $(m, m, \ldots, m)$, где m – натуральное число.

Решение.

Пусть S – сумма всех чисел интересного набора, c – наибольшее число, a и b – еще два каких-то числа из набора. Суммы $S - a - c$ и $S - b - c$ делятся на c, значит, и их разность $b - a$ кратна c. Поскольку эта разность по модулю меньше c, то она нулевая. Итак, все числа набора, кроме наибольшего числа c, равны a.

$S - a - a = (p - 1)a + c$ делится на a, следовательно, $c = ka$.

$S - a - c = pa$ делится на c, что равносильно делимости p на k. Итак, $k = 1$ или $k = p$.

6. [8 очков] Банк обслуживает миллион клиентов, список которых известен Остапу Бендеру. У каждого есть свой PIN-код из шести цифр, у разных клиентов коды разные. Остап Бендер за один ход может выбрать любого клиента, которого он еще не выбирал, и подсмотреть у него цифры кода на любых N позициях (у разных клиентов он может выбирать разные позиции). Остап хочет узнать код миллионера Корейко. При каком наименьшем N он гарантированно сможет это сделать? (*Г.К. Жуков*)

Ответ. При $N = 3$.

Решение. Это нетрудно сделать при $N = 3$. Так как любая комбинация из первых трех цифр встречается ровно по 1000 раз, то посмотрев эти цифры у всех, кроме Корейко, Бендер будет знать их и у Корейко. Далее достаточно посмотреть три последние цифры у Корейко.

Докажем, что при $N < 3$ нельзя гарантированно узнать код Корейко K. Для каждой из 6 позиций выберем код, который от K отличается только в этой позиции. Соответствующую цифру в выбранном коде назовём *плохой*. Пусть Бендеру не повезло, и при первой же проверке *не Корейко* ему попался выбранный код, причём плохую цифру он не проверил (есть 4 непроверенных позиции, мог попасться код с плохой цифрой на одной из этих позиций). Пусть то же случилось при второй и третьей проверках не Корейко (есть 4 непроверенных позиции, из 4 выбранных кодов с плохой цифрой на этих местах ранее проверено не более двух, значит, такой код мог попасться). Когда все коды проверены, посмотрим, какие $N < 3$ позиций проверены в коде K. Из 4 непроверенных позиций хотя бы одна совпадает с позицией плохой цифры в одном из трёх проверенных выбранных кодов – кода L. Но если поменять местами L и K, то результаты всех проверок не изменятся. Значит, Бендер не сможет отличить L от K.

7. [8 очков] В равностороннем треугольнике ABC провели высоту AH. В треугольнике ABH отметили точку пересечения биссектрис I. В каждом из треугольников ABI, BCI и CAI отметили по точке пересечения биссектрис – L, K и J соответственно. (*К. Голубев*)

Найдите величину угла KJL.

Ответ. 30°.

Решение 1. *(От центрального жюри)* Обозначим через M точку пересечения биссектрис треугольника AHC, а через O – центр треугольника ABC (рис. 1). Точка M из симметрии лежит на биссектрисе угла OBC, то есть точки B, K, M лежат на одной прямой. Из той же симметрии треугольник IMO равнобедренный, то есть $\angle IMO = 30°$.

$\angle OAJ = \angle IAJ - \angle IAO = \angle CAJ - \angle CAM = \angle JAM$, поэтому AJ и OJ – биссектрисы углов треугольника AOM. Значит, и MJ – тоже биссектриса его угла. Угол между биссектрисами двух углов треугольника выражается через его третий угол. Углы MAO и BCI в треугольниках AOM и CIB равны, следовательно, углы MJO и BKI между их биссектрисами также равны.

Значит, точки I, K, M, J лежат на одной окружности, и $\angle BJK = \angle IJK = \angle IMK = \angle OMB - \angle IMO = 45° - 30° = 15°$.

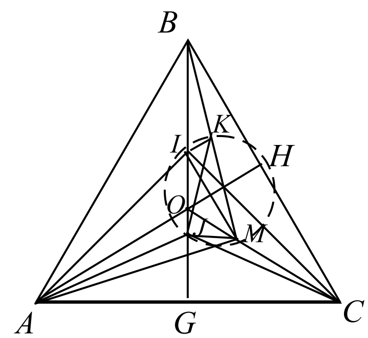


Рис. 1.

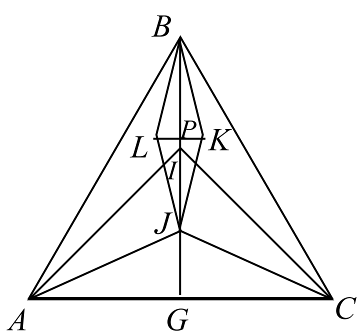


Рис. 2

Решение 2. $\angle IAC = \angle IAH + \angle HAC = 45°$. Поскольку точка I лежит на биссектрисе угла B, AIC – равнобедренный прямоугольный треугольник.

Пусть вписанная окружность треугольника ABI касается стороны BI в точке P. P, очевидно, – середина отрезка KL (рис. 2). Докажем, что P – также середина отрезка BJ. Отсюда следует, что $BKJL$ – ромб и $\angle KJL = \angle KBL = 30°$.

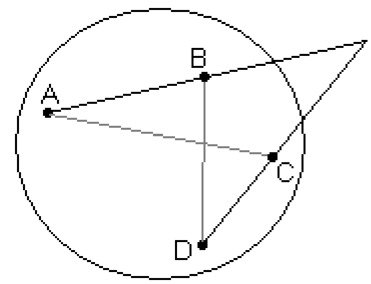
Пусть $AB = 2$, тогда $AI = \sqrt{2}$, а высота BG треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. Как известно,
$BP = {}^1/_2(AB + BI - AI) = {}^1/_2(2 + (\sqrt{3} - 1) - \sqrt{2}) = {}^1/_2(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})$,

Радиус JG вписанной в прямоугольный треугольник AIC окружности равен
${}^1/_2(AI + CI - AC) = {}^1/_2(2\sqrt{2} - 2) = \sqrt{2} - 1$, поэтому $BJ = BG - JG = \sqrt{3} - (\sqrt{2} - 1) = 2BP$, что и требовалось.

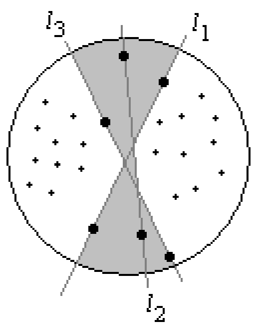
Старшие классы

1. [4 очка] См. задачу Мл3.

2. [5 очков] Внутри круга отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары и провести прямую через каждую пару так, чтобы все точки пересечения прямых были в круге. (*А.В. Шаповалов*)



Решение 1. *(От центрального жюри)* Разобьём точки на пары так, чтобы сумма длин соответствующих отрезков была максимальной. Допустим, для пар точек (A, B) и (C, D) прямые AB и CD пересекаются вне круга (см. рис.). Тогда четырехугольник $ABCD$ – выпуклый, $AC + BD > AB + CD$, то есть, разбив на пары по-другому, мы получили бы большую сумму длин отрезков.



Решение 2. Вращая прямую вокруг какой-то из точек, добьёмся, чтобы она прошла ещё через одну точку и разделила остальные точки пополам. Это будет первая пара, ей отвечает прямая l_1. Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через пары точек из разных половинок. Выберем из них прямую l_2, для которой угол поворота по часовой стрелке от l_1 к l_2 – минимальный (см. рис). Внутри этого угла (он закрашен) нет точек, иначе, с использованием этих точек, можно было бы выбрать меньший угол. Все точки вне этих прямых разбиты каждой из этих прямых пополам. Аналогично выберем третью прямую l_3, минимизируя угол поворота от l_2 к l_3. Она тоже разобьёт точки вне прямых пополам, и т. д. Так как каждый раз мы выбираем точки по разные стороны от ранее проведённых прямых, то соответствующие отрезки пересекают все прямые внутри круга.

3. [6 очков] Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа a_1, a_2, …, a_n, что при всех целых x число $(\ldots((x^2 + a_1)^2 + a_2)^2 + \ldots + a_{n-1})^2 + a_n$ делится на $2n - 1$. (*А.С. Бердников*)

Решение. Достаточно рассматривать только остатки при делении на $2n$–1, расположим их по кругу обычным образом. Так как равны квадраты остатков, симметричных относительно нуля, то для x^2 возможно максимум n различных остатков. Выберем любые два из них. Поскольку какое-то из двух расстояний между ними по циклу четное, то можно подобрать сдвиг на a_1, чтобы они стали симметричными. Тогда после второго возведения в квадрат останется не более $n - 1$ различных остатков. Действуя таким образом, после n-го возведения в квадрат оставим не более одного остатка, сдвинем его в нуль с помощью a_n.

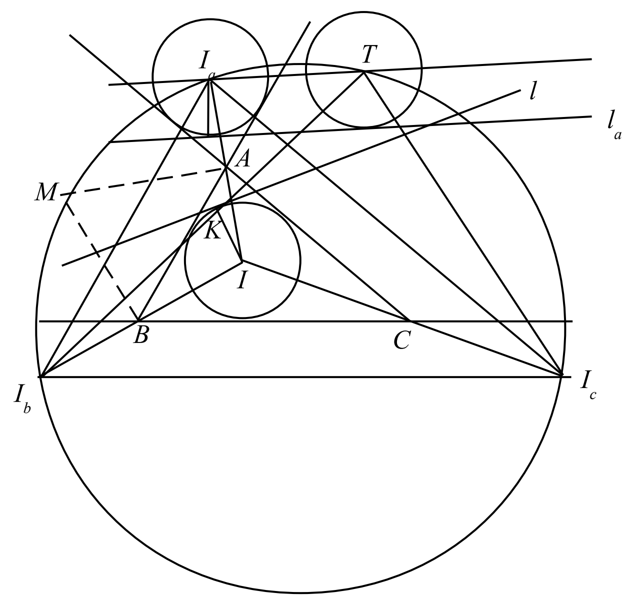
4. [6 очков] Внутри каждой грани единичного куба выбрали по точке. Затем каждые две точки, лежащие на соседних гранях, соединили отрезком. Докажите, что сумма длин этих отрезков не меньше, чем $6\sqrt{2}$. (*В.В. Произволов*)

Решение. Спроектируем четыре отрезка, соединяющие точки, лежащие на боковых гранях, на нижнюю грань куба. При этом длины отрезков не увеличатся. Мы получили четырехугольник, вписанный в единичный квадрат. Докажем, что его периметр не меньше $2\sqrt{2}$. Аналогично оцениваются суммы длин еще двух четверок отрезков.

Можно сослаться на известный факт: *периметр четырехугольника, вписанного в прямоугольник* (по вершине на каждой стороне), *не меньше удвоенной диагонали прямоугольника* (см., например, www.problems.ru, зад. 108606). Но для квадрата можно это доказать проще. Проекция отрезка отсекает от квадрата прямоугольный треугольник и служит его гипотенузой. Из неравенства $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ следует, что длина гипотенузы не меньше полусуммы катетов, умноженной на $\sqrt{2}$. Поэтому сумма длин четырех этих проекций не меньше полупериметра грани, умноженного на $\sqrt{2}$, то есть не меньше $2\sqrt{2}$.

5. [8 очков] Дан треугольник ABC и прямая l, касающаяся вписанной в него окружности. Обозначим через l_a, l_b, l_c прямые симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC. (*А.А. Заславский*)

Решение. Расположим сторону BC горизонтально (B левее C), а точку A – выше прямой BC. Обозначим через α, β, γ величины углов A, B, C. Прямая l_b получается из l_a композицией двух симметрий, то есть поворотом (*против часовой стрелки*) вокруг точки пересечения осей этих симметрий – биссектрис AM и BM на удвоенный угол AMB. Нетрудно проверить, что $\angle AMB = 90° - \gamma/2$, то есть l_b получается из l_a поворотом на угол γ *по часовой стрелке*. Таким образом, угол между l_a и l_b равен γ. Аналогично угол между прямыми l_a и l_c равен β. Значит, треугольник Δ, образованный прямыми l_a, l_b и l_c, подобен трегольнику ABC.



Пусть прямая l касается вписанной окружности (радиуса r с центром I) в точке K. Тогда прямая l_a касается окружности радиуса r с центром в точке I_a, полученной из I симметрией относительно биссектрисы AM. Заметим, что $II_a = 2IA$. Аналогично прямые l_b и l_c касаются окружностей радиуса r с центрами в соответствующих точках I_b и I_c. При этом $II_b = 2IB$, $II_c = 2IC$, значит, треугольники $I_aI_bI_c$ и ABC подобны (с коэффициентом 2).

Пусть прямая, параллельная l_a и проходящая через I_a, второй раз пересекает описанную окружность треугольника $I_aI_bI_c$ в точке T. Рассмотрим случай, когда точка T расположена на дуге I_aI_c (случаи, когда она попадет на дугу I_aI_b или I_bI_c аналогичны, а случай, когда T совпадает с I_a предоставляется читателю).

$\angle I_aTI_b = \angle I_aI_cI_b = \gamma$, значит, прямая TI_b получается из TI_a поворотом на угол γ *по часовой стрелке*, то есть $TI_b \parallel l_b$. Аналогично, $TI_c \parallel l_c$.

Прямая l_a касается окружности Ω_T радиуса r с центром T. Этой же окружности касаются прямые l_b и l_c. Таким образом, Ω_T является либо вписанной, либо вневписанной окружностью треугольника Δ. Нам достаточно доказать, что она вписанная. Ясно, что как точка T, так и вершины треугольника Δ непрерывно зависят от K. При непрерывном изменении вписанная окружность постоянного радиуса не может превратиться во вневписанную. Поэтому достаточно проверить, что она вписана хотя бы при одном положении прямой l. Но это так, например, когда l совпадает с прямой BC (при этом Δ симметричен треугольнику ABC относительно внешней биссектрисы угла A, а совпадает с I_a).

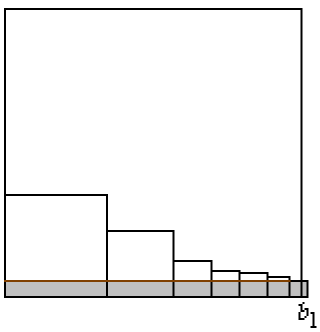
6. а) [3 очка] В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n-го прямоугольника равна n^2. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

б) [6 очков] Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдутся квадраты суммарной площади больше N? (*А.С. Бердников*)

Ответ. а) Не обязательно. б) Обязательно.

Решение. а) Построим пример, когда нельзя покрыть даже круг радиуса 1. Сделаем ширину n-го прямоугольника равной 2^{-n}. Его пересечение с единичным кругом лежит в прямоугольнике 2×2^{-n}, значит, он покрывает площадь, меньшую 2^{-n+1}. В совокупности прямоугольники покроют площадь, меньшую 2, что меньше площади круга.

б) Если среди квадратов есть бесконечное число со стороной больше некоторого числа a, то утверждение очевидно. Поэтому далее мы считаем, что для каждого таких квадратов – конечное число. Это, в частности, означает что квадраты можно упорядочить по убыванию площади.



Разобьём плоскость на единичные клетки и занумеруем их по спирали. Будем покрывать очередную клетку. Если очередной квадрат не меньше клетки, просто накроем им клетку. Пусть в какой-то момент остались только квадраты со стороной меньше 1. Тогда будем располагать квадраты в клетке рядами как на рисунке. Ставим квадраты на основание клетки, следующий вплотную к предыдущему. Пусть сумма площадей квадратов превзошла 1. Поскольку площадь численно меньше стороны квадрата, то и сумма сторон будет больше 1, поэтому в какой-то момент все основание клетки будет покрыто, и очередной квадрат со стороной b_1 вылезет, хотя бы частично, за правую сторону клетки. Отрежем полосу высоты b_1. Часть клетки вне полосы будем считать полностью не покрытой, и начнём ставить следующий ряд квадратов на верхнюю границу полосы начиная с её левого конца. Пусть следуюшая полоса заканчивается квадратом со стороной b_2 и т.д. Докажем, что сумма высот полос $b_1 + b_2 + \dots$ рано или поздно превзойдёт 1. Ширина каждой полосы не превосходит 2. Высота всех квадратов из $(i+1)$-й полосы не больше b_i, поэтому сумма их площадей не превышает $2b_i$. Выкладываем полосы, пока сумма площадей квадратов во всех законченных полосах, кроме первой, не превзойдёт 2. В этот момент $2b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_n \geq 2$, откуда $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq 1$. Это означает, что полосы покрыли клетку целиком. Переходим к следующей клетке…

7. У Кости была кучка из 100 камешков. Каждым ходом он делил какую-то из кучек на две меньших, пока у него в итоге не оказалось 100 кучек по одному камешку. Докажите, что

а) [6 очков] в какой-то момент в каких-то 30 кучках было в сумме ровно 60 камешков;

б) [3 очка] в какой-то момент в каких-то 20 кучках было в сумме ровно 60 камешков;

в) [3 очка] Костя мог действовать так, чтобы ни в какой момент не нашлось 19 кучек, в которых в сумме ровно 60 камешков. (*К.А. Кноп*)

Решение. Будем называть кучки с 1, 2, 3, 4 камешками соответственно единичка, двойка, тройка, четвёрка.

а) Дождемся, когда станет 70 кучек. Среди них найдется 40 единичек (в противном случае в кучках не менее $2\cdot39 + 31 = 109$ камешков). Если их отбросить, то останется 30 кучек, содержащих 60 камней.

б) **Первый способ**. Докажем индукцией по a, что при $a = 2, 3, \dots, 20$ у нас в некоторый момент найдётся $60 + 2a$ камней в $20 + a$ кучках. *База*: при $a = 20$: после 40 хода есть 100 камней в 40 кучках.

Шаг индукции: при $a > 2$ среди них найдется двойка или две единички, поскольку $3(19 + a) + 1 > 60 + 2a$. Отбросим их, и во втором случае дождёмся, когда Костя разобьёт одну из оставшихся кучек на две. В результате a уменьшится на 1.

При $a = 2$ имеем 64 камня в 22 кучках.

Покажем, что мы можем набрать сейчас 4 камня двумя или более кучками. Пусть это не так. Если есть единичка, то камней хотя бы $1 + 1 + 1 + 4\cdot 19>64$, если нет, то хотя бы $2 + 3\cdot 21 > 64$. Противоречие.

Отбросив эти 4 камня, мы получим 60 камней в 20 или менее кучках. Осталось дождаться, когда этих кучек станет ровно 20.

Второй способ. (*К.А.Кноп*) Обозначим через S_n сумму размеров 20 наибольших кучек после n ходов. Например, $S_{19} = 100$ (после 19 ходов впервые образовались 20 кучек); $S_{99} = 20$ (после 99 ходов все кучки состоят из 1 камня).

Пусть S_n ни при каком n не принимает значение 60. Рассмотрим то значение n, когда $S_n > 60$, $S_{n+1} < 60$. Поскольку $S_{n+1} < 3\cdot 20$, то среди наших 20 кучек хотя бы одна меньше тройки. Значит, все кучки, не входящие в 20, – единички или двойки. Но поскольку S_n могла уменьшиться только на величину кучки, не вошедшей в 20 наибольших, то $S_n – S_{n+1} \le 2$. Это означает, что $S_n = 61$ и $S_{n+1} = 59$. Кроме того, среди 20 наибольших кучек единичек нет. Поскольку вне 20 кучек (то есть в единичках и двойках) лежит нечетное число камней, то там единичка есть обязательно.

Рассмотрим 2 случая.

1) После n-го хода среди 20 кучек была двойка. Тогда вместо нее можно было взять единичку, и в результате получить сумму $S_n – 2 + 1 = 60$.

2) После n-го хода среди 20 кучек двойки не было. Так как $S_n = 3\cdot 20 + 1$, то размеры этих 20 кучек были $4 + 3 + 3 + ... + 3$. Если на этом этапе нет 20 кучек с суммой 60, то все остальные кучки – единички. Но тогда 60 получается в 21 кучке: $4 + 18\cdot 3 + 2\cdot 1$. Заметим, что какая-то пара из имеющихся кучек (размера 4, 3 и 1) получилась в результате (n–1)-го хода, а до него эти две кучки были вместе. Объединив их в одну кучку (и заменив их сумму в выражении $4 + 18\cdot 3 + 2\cdot 1$ одним слагаемым), мы видим, что после (n–1)-го хода было ровно 20 кучек с суммой 60.

Третий способ. Дождемся, когда образуется 40 куч, и выберем 20 самых больших. Если в них меньше 60 камней, то самая малая из этих куч не больше двойки. Однако тогда в 20 невыбранных кучах больше 40 камней, и, значит, самая большая из них больше двойки. Противоречие.

Разобьём все кучи на две группы – главную и неглавную – так, чтобы в главной было не менее 60 камней и не более 20 куч. В силу предыдущего абзаца хотя бы одно такое разбиение есть. *Идеальным* будет разбиение, при котором главных камней ровно 60. Тогда останется только дождаться момента, когда после некоторого числа делений число главных куч станет равным 20. Если идеальных разбиений нет, поищем *хорошее* – чтобы главных куч было не более 19. Если нет и хороших, поищем разбиение с минимальным отклонением числа главных камней от 60.

Пусть у нас есть хорошее разбиение. Тогда неглавных куч не менее 21 с числом камней меньше 40, поэтому среди неглавных куч есть две единички. Пусть есть $60 + k$ главных камней. Дождёмся, когда главных куч станет 19. Если есть куча размера не больше k, выкинем её. Если нет, но есть куча размера $k + 1$, поменяем её с неглавной единичкой. Если же все кучи размера не меньше $k + 2$, то $60 + k \ge 19(k + 2)$, откуда $k \le 1$. Если $k = 0$, то получили идеальное разбиение. Если $k = 1$, то среди 19 куч общим размером 61 нет единичек и двоек, поэтому есть тройка. Заменив тройку на две единички, получим идеальное разбиение.

Пусть хороших разбиений нет, а есть разбиение с 20 главными кучами общим размером $60 + k$. Поскольку ни одну из куч нельзя ни выкинуть, ни заменить на неглавную единичку, то, аналогично предыдущему абзацу, все кучи имеют размер больше $k + 1$, и $k \leq 1$. Значит, $k = 1$, и 61 камень разбит на кучи размером не меньше 3. Но тогда это 19 троек и одна четвёрка.

Пусть K – самая большая неглавная куча, в ней p камней, $p \geq 2$. Если $p \leq 3$, то заменим на K главную кучу из $p + 1$ камня. Если $p = 4$, то заменим пару главных троек на K и единичку. Если $p = 5$, то заменив пару главных троек на K, получим идеальное распределение. Наконец, при $p > 5$ такая замена даст нам хорошее распределение.

в) Пусть Костя отделяет от самой большой кучи по тройке, пока не останется четвёрка. До сих пор была одна куча, где число камешков не делилось на 3. Сумма в любых 19 кучках с её участием не делилась на 3, а без неё не превосходила 57, то есть ни так ни этак не равнялась 60. Затем Костя делит четвёрку на две двойки. Теперь и в дальнейшем каждая кучка не больше тройки, поэтому в любых 19 кучках не больше 57 камней.