33-й Международный математический Турнир городов

2011/12 учебный год

Решения задач (А.Шаповалов, Л.Медников)

Весенний тур

Базовый вариант, младшие классы

1. [3] Под одной из клеток доски 8×8 зарыт клад. Под каждой из остальных зарыта табличка, в которой указано, за какое наименьшее число шагов можно добраться из этой клетки до клада (одним шагом можно перейти из клетки в соседнюю по стороне клетку). Какое наименьшее число клеток надо перекопать, чтобы наверняка достать клад? (*Н.П. Стрелкова*)

Ответ. 3 клетки. **Решение.** Перекопаем угловую клетку *U*. Пусть там табличка. Тогда все клетки на указанном расстоянии от *U* образуют диагональ, перпендикулярную главной диагонали из *U*. Перекопаем угловую клетку *W* на одной стороне с *U*. Если и там табличка, то образуется еще одна диагональ, перпендикулярная первой. Диагонали пересекаются по одной клетке, там-то клад и зарыт.

Двух перекапываний может не хватить. Пусть, например, нам не повезло, и в первый раз мы откопали табличку с числом 1. Тогда клад находится на соседней клетке, но таких клеток рядом с любой не менее двух.

2. [4] Существует ли натуральное число, у которого нечетное количество четных натуральных делителей и четное количество нечетных? (Множество натуральных делителей любого натурального числа всегда содержит 1 и само это число.) (*Г. Жуков*)

Ответ. Не существует. **Решение.** Число должно быть чётно, иначе у него 0 нечётных делителей. Пусть наибольшая степень двойки, на которую делится наше число – это 2^k. Тогда каждый делитель числа можно однозначно представить в виде $2^m n$, где $m \le k$, а n – нечётный делитель числа. И наоборот, если n – нечётный делитель, то n и 2^k – взаимно просты, поэтому $2n, 2^2n, \ldots, 2^kn$ – тоже делители, причем все они чётны. Таким образом, из каждого нечётного делителя получаются $k - 1$ различных чётных. Значит, всего чётных делителей в $k - 1$ раз больше, чем нечётных. Но количество нечётных делителей чётно, значит, количество чётных – тоже чётно.

3. [4] Дан параллелограмм *ABCD*. Вписанные окружности треугольников *ABC* и *ADC* касаются диагонали *AC* в точках *X* и *Y*. Вписанные окружности треугольников *BCD* и *BAD* касаются диагонали *BD* в точках *Z* и *T*. Докажите, что если все точки *X*; *Y*; *Z*; *T* различны, то они являются вершинами прямоугольника. (*Р.К. Гордин*)

Решение. Четырехугольник *XZYT*, как и вся картинка, симметричен относительно центра *O* параллелограмма *ABCD*. Значит, *XZYT* – параллелограмм. Осталось проверить, что его диагонали равны.

Пусть $BC = a$, $AC = b$. $AB = c$. По известным формулам для расстояния от вершин треугольника до точек касания сторон с вписанной окружностью $AX = {}^1/_2\,(b + c - a)$, $AY = CX = {}^1/_2\,(a + b - c)$, поэтому $XY = |AX - AY| = |c - a|$, то есть разности сторон параллелограмма *ABCD*. Ясно, что тот же результат мы получим и для отрезка *ZT*.

4. В выражении $10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$ расставили скобки так, что в результате вычислений получилось целое число. Каким **а**) [2] наибольшим; **б**) [3] наименьшим может быть это число? (*И.Ф. Акулич*)

Ответ. **а**) 44800; **б**) 7.

Решение. **а**) В результате расстановки скобок данное выражение можно будет представить в виде дроби, где некоторые из данных чисел попадут в числитель, а другие – в знаменатель. Очевидно, при любой расстановке скобок число 10 попадет только в числитель, а 9 – только в знаменатель. Поэтому, чтобы получить наибольшее возможное число, надо все остальные числа поместить в числитель. Это возможно, и потому наибольшее значение равно $10 : (9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1) = \frac{10\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{9}$.

б) Если число 7 попадет в знаменатель дроби, то получится нецелое число, поскольку эту семерку будет не с чем сократить. Следовательно, число 7 должно оказаться в числителе, и получившееся в итоге целое число будет делиться на 7. Но наименьшее целое, кратное 7, – это 7. Остальные числа можно разбить на две группы с равным произведением, причем так, чтобы числа 10 и 9 попали в разные группы: $10\cdot 6\cdot 4\cdot 3 = 9\cdot 8\cdot 5\cdot 2\cdot 1$. Это равенство дает возможность так расставить скобки, чтобы получилось как раз число 7:

$$10 : 9 : (8 : 7 : (6 : (5 : 4 : (3 : 2 : 1)))) = \frac{10\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 2\cdot 1}.$$

5. [5] У Носорога на шкуре есть вертикальные и горизонтальные складки. Всего складок 17. Если Носорог чешется боком о дерево, то либо две горизонтальные, либо две вертикальные складки на этом боку пропадают, зато на другом боку прибавляются две складки: горизонтальная и вертикальная. (Если двух складок одного направления нет, то ничего не происходит.) Носорог почесался несколько раз. Могло ли случиться, что на каждом боку вертикальных складок стало столько, сколько там раньше было горизонтальных, а горизонтальных стало столько, сколько там было вертикальных? (*И. Высоцкий*)

Ответ. Не могло. **Решение.** Пусть поменять удалось. Число складок на левом боку уменьшается на два при чесании левого бока и увеличивается на два при чесании правого. Так сумма не изменилась, то левый и правый бока почесали одинаковое число раз. При каждом почёсывании общее число вертикальных складок меняется на 1, то есть, оно меняет чётность. Так как всего сделано чётное количество почёсываний, чётность общего числа вертикальных складок в итоге не изменится. Заметим, однако, что чётности чисел вертикальных и горизонтальных складок различны, так как их сумма 17 нечётна. Значит, конечное число вертикальных складок не равно начальному числу горизонтальных складок, то есть, поменять друг с другом числа на каждом боку не удастся.

Базовый вариант, старшие классы

1. [4] Из каждой вершины выпуклого многогранника выходят ровно три ребра, причем хотя бы два из этих трех ребер равны. Докажите, что многогранник имеет хотя бы три равных ребра. (*В.В. Произволов*)

Решение 1. Предположим, что это не так. Рассмотрим грань $A_1A_2\ldots A_n$, в которой есть два равных ребра A_1A_2 и A_2A_3, выходящие из одной вершины (по условию такая грань существут). Рассмотрим также ребра A_iB_i, не лежащие в этой грани (некоторые точки B_i могут совпадать). По предположению $A_3A_4 \neq A_3A_2$, $A_3B_3 \neq A_3A_2$, следовательно, $A_3B_3 =$

A_3A_4. Далее $A_4A_5 \neq A_4A_3$, $A_4B_4 \neq A_4A_3$, значит, $A_4A_5 = A_4B_4$. Продолжая, получим, что $A_1A_2 = A_1B_1$. Противоречие.

Решение 2. Пусть есть n вершин, тогда рёбер $^3/_2\, n$. Для каждой вершины выберем пару равных рёбер с общим концом в этой вершине, всего n пар. Если все пары различны, то в них уже $2n$ рёбер, что больше чем $^3/_2\, n$. Противоречие.

2. [4] Дана клетчатая полоска из $2n$ клеток, пронумерованных слева направо следующим образом:

$$1,\ 2,\ 3, ...,\ n,\ -n, \ldots,\ -2,\ -1$$

По этой полоске перемещают фишку, каждым ходом сдвигая ее на то число клеток, которое указано в текущей клетке (вправо, если число положительно, и влево, если отрицательно). Известно, что фишка, начав с любой клетки, обойдет все клетки полоски. Докажите, что число $2n + 1$ – простое. (*А.В. Грибалко*)

Решение. Допустим, что $2n + 1$ – не простое. Тогда среди чисел 2, 3, …, n найдётся делитель d числа $2n + 1$. Покажем, что начав с него, мы всегда будем попадать только на числа, кратные d (и тем самым всех чисел не обойдем). Для этого занумеруем числа слева направо. Заметим, что отрицательные числа в правой половине ровно на $2n + 1$ меньше своего номера, поэтому, если номер кратен d, то и число тоже кратно d. При сдвиге вправо номер удваивается, поэтому делимость на d как его, так и числа в строке сохраняется. Ввиду симметрии делимость сохраняется и при сдвиге влево.

3. [5] На плоскости нарисовали кривые $y = \cos x$ и $x = 100\cos(100y)$ и отметили все точки их пересечения, координаты которых положительны. Пусть a – сумма абсцисс этих точек, b – сумма ординат этих точек. Найдите $\dfrac{a}{b}$. (*И.И. Богданов*)

Ответ. 100. **Решение.** После замены $x = 100u$ уравнения примут вид: $y = \cos(100u)$, $u = \cos(100y)$. Ординаты соответствующих точек пересечения новых кривых будут те же, а абсциссы уменьшатся в 100 раз. Пусть c – сумма абсцис новых точек пересечения (с положительными координатами). Новые кривые симметричны относительно прямой $y = u$, поэтому их точки пересечения расположены симметрично относительно этой прямой. Значит, $c = b$, а $a = 100b$.

4. [5] Четырехугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB, а другая – хорду CD, отметим их точку касания X. Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности. (*А. Бердников*)

Решение. Обозначим через Ω_1 и Ω_2 касающиеся окружности, содержащие соответственно хорды AB и CD, а через Ω – описанную окружность четырехугольника $ABCD$. Пусть O – точка пересечения прямых AB и CD. Заметим, что точка O лежит вне всех трёх окружностей. Докажем, что точка O лежит на общей касательной окружностей Ω_1 и Ω_2, проходящей через точку X.

Пусть это не так, тогда луч OX второй раз пересекает Ω_1 в точке Y, а Ω_2 – в отличной от нее точке Z. Имеем $OX{\cdot}OY = OA{\cdot}OB = OC{\cdot}OD = OX{\cdot}OZ$. Значит, $OY = OZ$. Противоречие.

Из доказанного следует, что длина касательной OX равна $\sqrt{OA \cdot OB}$, то есть точка X лежит на окружности с центром O и радиусом $\sqrt{OA \cdot OB}$.

Замечание для знатоков. Можно сразу заметить, что *радикальные оси* пар окружностей Ω_1 и Ω (прямая AB), Ω_2 и Ω (прямая CD), Ω_1 и Ω_2 (общая касательная) пересекаются в *радикальном центре* трёх окружностей.

5. [5] Белая ладья стоит на поле b2 шахматной доски 8×8, а черная – на поле c4. Игроки ходят по очереди, каждый – своей ладьей, начинают белые. Запрещается ставить свою ладью под бой другой ладьи, а также на поле, где уже побывала какая-нибудь ладья. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой? (За ход ладья сдвигается по горизонтали или вертикали на любое число клеток, и считается, что она побывала только в начальной и конечной клетках этого хода.) (*А.К. Толпыго*)

Ответ. Второй игрок. **Решение.** Разобьем вертикали на пары, поместив при этом вертикали b и c в одну пару. Также разобьем на пары горизонтали, поместив при этом 2-ю и 4-ю в одну пару. Тогда и клетки разобьются на пары: парная клетка лежит на пересечении парной горизонтали и парной вертикали. Ладьи на парных клетках друг друга не бьют. Стратегия второго: на любой ход первого отвечать ходом в парную клетку. Это возможно: если первый сделал ход ладьёй из одной клетки в другую, то эти клетки лежат в одном ряду. Но тогда парные к ним клетки лежат в парном ряду, и ход ладьёй между ними тоже возможен. Таким образом, всегда после хода второго все непосещённые клетки будут состоять из указанных пар, и второй всегда будет попадать на непосещённую клетку. Значит, именно первый когда-то не сможет сделать ход и проиграет.

Замечание. Если бы ладьи изначально стояли на центрально-симметричных клетках, то второй мог выиграть, каждым ответным ходом восстанавливая центральную симметрию. Так давайте поменяем местами вертикаль b с f, а 2-ю горизонталь с 7-й. Ход, возможный на одной доске остался возможным и на другой, и наоборот, но теперь уже можно играть «по симметрии»!