

33 Турнир городов

Решения осеннего сложного варианта

Л.Э.Медников, А.В.Шаповалов

Младшие

1. [3 балла] Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2011? (А. Бердников)

Ответ. При любом.

Решение 1. Прибавляя по N , получим $2011N$. Отнимая по 2011, получим 2011.

Решение 2. Если N нечетно, прибавим N и получим четное число. Прибавляя к нему или вычитая из него двойки, получим 4022. Отняв 2011, получим 2011.

2. [4 балла] На стороне AB треугольника ABC взята такая точка P , что $AP = 2PB$, а на стороне AC – ее середина, точка Q . Известно, что $CP = 2PQ$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный. (В. Произолов)

Решение. Отложим на продолжении стороны AB отрезок $BD = PB$. Тогда PQ – средняя линия треугольника ACD . Следовательно, $CD = 2PQ = CP$, то есть треугольник PCD – равнобедренный. CB – его медиана, а значит, и высота. Итак, угол B – прямой.

3. [5 баллов] В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе. (А. Шаповалов)

Ответ. 6 гирь. **Решение.** Упорядочим гири по возрастанию веса. Чтобы уравновесить пару самых тяжелых гирь, надо не менее трех гирь, значит всего гирь не менее 5. Допустим, гирь ровно пять: $G_1 < G_2 < G_3 < G_4 < G_5$. Как $G_3 + G_5$, так и $G_4 + G_5$ можно уравновесить только всеми остальными. Значит, веса этих пар равны половине общего веса гирь, и равны между собой, что противоречит условию $G_3 < G_4$.

Убедимся, что 6 гирь с целыми весами от 3 до 8 подходят. Рассмотрим пару (m, n) , где $m < n$. Если $n - m > 2$, то столько же весит пара $(m + 1, n - 1)$. Если $m > 3$ и $n < 8$, то столько же весит пара $(m - 1, n + 1)$. Рассмотренные случаи не охватывают 4 пары: $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(6, 8)$ и $(7, 8)$. Они уравниваются соответственно наборами $\{7\}$, $\{8\}$, $\{3, 4, 7\}$, $\{4, 5, 6\}$.

4. [6 баллов] На клетчатой доске из 2012 строк и $k > 2$ столбцов в какой-то клетке самого левого столбца стоит фишка. Двое ходят по очереди, за ход можно передвинуть фишку вправо, вверх или вниз на одну клетку, при этом нельзя передвигать фишку на клетку, в которой она уже побывала. Игра заканчивается, как только один из игроков передвинет фишку в самый правый столбец. Но будет ли такой игрок выигравшим или проигравшим – сообщается игрокам только в тот момент, когда фишка попадает в предпоследний столбец (второй справа). Может ли один из игроков обеспечить себе выигрыш? (А. Бердников)

Ответ. Это может сделать первый игрок. **Решение.** Первый может заставить второго переместить фишку во 2-й (слева) столбец. Для этого он определяет, где – выше или ниже исходной клетки – в первом столбце осталось нечетное число свободных клеток (такое направление найдется, потому что 2011 – число свободных клеток – нечетно). После этого он делает ход в «нечетном» направлении. Если второй упорно сопротивляется переходу

во 2-й столбец, то ему придется продолжать идти в этом направлении. Но ход в **крайнюю** клетку сделает первый, и второму все равно придется перейти во 2-й столбец.

Аналогично первый игрок заставляет второго перейти в 3-й, 4-й, ..., предпоследний столбец. Если при этом он узнает, что перейти в последний столбец выгодно, он туда и идет. В противном случае, он, как и раньше, заставляет перейти туда второго игрока.

5. [6 баллов] Известно, что $0 < a, b, c, d < 1$ и $abcd = (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d)$. Докажите, что $(a + b + c + d) - (a + c)(b + d) \geq 1$. (*Г. Гальперин*)

Решение. Произведение положительных чисел ac и bd равно произведению положительных чисел $(1 - a)(1 - c)$ и $(1 - b)(1 - d)$. Поэтому либо $ac \geq (1 - a)(1 - c)$, $bd \leq (1 - b)(1 - d)$, либо $ac \leq (1 - a)(1 - c)$, $bd \geq (1 - b)(1 - d)$.

Разберем первый случай. Раскрыв скобки и приведя подобные, получим $1 - (a + c) \leq 0$, $1 - (b + d) \geq 0$. Перемножив левые части, получим отрицательное число или 0: $1 - (a + c) - (b + d) + (a + c)(b + d) \leq 0$. Последнее неравенство равносильно тому, что надо доказать.

Второй случай рассматривается аналогично первому.

6. [7 баллов] По прямому шоссе со скоростью 60 км в час едет машина. Недалеко от шоссе стоит параллельный ему 100-метровый забор. Каждую секунду пассажир машины измеряет угол, под которым виден забор. Докажите, что сумма всех измеренных им углов меньше 1100° . (*А. Шень*)

Решение. За 6 секунд машина проезжает 100 м. Разобьем вершины измеренных углов на 6 групп, с интервалом 100 м между соседними (6 секунд по времени). Параллельно перенесем все углы с вершинами в одной группе так, чтобы их вершины попали в одну точку. Пусть забор лежит на прямой a . Тогда каждый перенесенный угол высекает на a 100-метровый отрезок, полученный переносом забора. Очевидно, эти участки не перекрываются. Сумма перенесенных углов высекает всю прямую a или её часть, поэтому эта сумма не более 180° . А шесть групп дадут в сумме не более $6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ < 1100^\circ$.

7. [9 баллов] Вершины правильного 45-угольника раскрашены в три цвета, причём вершин каждого цвета поровну. Докажите, что можно выбрать по три вершины каждого цвета так, чтобы три треугольника, образованные выбранными одноцветными вершинами, были равны. (*В. Брагин*)

Решение. Пусть цвета синий, красный, желтый. Нарисуем черный 45-угольник на прозрачной пленке и наложим его на исходный. Назовем это положением С. Обведем на пленке кружками 15 синих вершин. Поворачивая пленку каждый раз на угол $360^\circ:45 = 8^\circ$, совмещаем вершины на пленке с вершинами исходного треугольника и считаем количество кружков, содержащих красные вершины. В среднем за полный оборот это количество равно $15 \cdot 15:45 = 5$. Так как в положении С таких кружков $0 < 5$, то в некотором положении К «красных» кружков не менее шести. Оставим на пленке только эти шесть кружков вершин. Аналогично найдем положение пленки Ж, где в эти 6 кружков попало более двух (то есть не менее трёх) желтых вершин. Сотрем все кружки кроме этих трёх. Они и дадут нам три равных треугольника: в положении Ж – желтый, в положении К – красный, в положении С – синий.

Старшие

1. [4 балла] Петя отметил на плоскости несколько (больше двух) точек, все расстояния между которыми различны. Пару отмеченных точек (A, B) назовем необычной, если A – самая дальняя от B отмеченная точка, а B – ближайшая к A отмеченная точка (не считая самой точки A). Какое наибольшее возможное количество необычных пар могло получиться у Пети? (*Б. Френкин*)

Ответ. Одна пара. **Решение.** Пусть (A, B) – необычная пара I, K – еще одна отмеченная точка. Тогда $BK < AB < AK$. Это значит, в частности, что пары (A, K) и (K, A) – обычные (K и A не ближайшие друг к другу). Пары (K, B) и (B, K) – обычные (K и B не самые дальние друг от друга). Допустим, что еще какие-то две точки C, D образуют необычную пару II. Выпишем цепочку неравенств, помечая каждое номером необычной пары, из-за которой оно выполнено: $AB >_I BC >_{II} CD >_{II} AD >_I AB$ – противоречие.

Пример с одной необычной парой (A, B) – вершины треугольника ABC , где $AC > AB > BC$.

2. [4 балла] См. зад. 5 младших классов.

3. [5 баллов] В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – основания высот из вершин A, B, C , точки C_A и C_B – проекции C_1 на AC и BC соответственно. Докажите, что прямая $C_A C_B$ делит пополам отрезки $C_1 A_1$ и $C_1 B_1$. (Г. Фельдман)

Решение 1. Рассмотрим случай остроугольного треугольника. Пусть отрезки $C_A C_B$ и $C_1 A_1$ пересекаются в точке K . Точки C_A и C_B лежат на окружности с диаметром CC_1 . Поэтому $\angle C_A C_B C = \angle C_A C_1 C = 90^\circ - \angle C_A C C_1 = \angle A$. Как известно, треугольник $A_1 B C_1$ подобен треугольнику $A_1 B C_1$, то есть $\angle C_1 A_1 B = \angle A$. Следовательно, треугольник $A_1 M C_B$ – равнобедренный, и $A_1 M = C_B M$. Углы $A_1 C_1 C_B$ и $C_1 C_B M$ дополняют равные углы $C_1 A_1 C_B$ и $A_1 C_B M$ до 90° , значит, треугольник $C_1 M C_B$ тоже равнобедренный, и $C_1 M = C_B M = A_1 M$. Аналогично доказывается, что прямая делит пополам и отрезок.

В случаях, когда один из углов треугольника тупой, в счет углов надо внести небольшие изменения.

Решение 2. Лемма. Основания перпендикуляров, опущенных из вершины K треугольника KLM на биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине L , и середины сторон KL и KM лежат на одной прямой.

Доказательство немедленно следует из того, что продолжив упомянутые перпендикуляры вдвое дальше, мы попадем как раз на прямую LM . ■

Вернемся к решению задачи. Как известно, высоты треугольника ABC являются биссектрисами (внешних или внутренних) углов треугольника $A_1 B_1 C_1$. Значит, перпендикулярные им стороны треугольника ABC – биссектрисы дополнительных углов. По лемме основания C_A и C_B перпендикуляров, опущенных из вершины C_1 на AC и BC , и середины сторон $A_1 C_1$, и $B_1 C_1$ лежат на одной прямой. А это и требовалось.

4. Существует ли выпуклый N -угольник, все стороны которого равны, а все вершины лежат на параболе $y = x^2$, если

а) [3 балла] $N = 2011$;

б) [4 балла] $N = 2012$? (И. Богданов)

Ответ. а) Существует. б) Не существует.

Решение. а) Пусть O – вершина параболы. Отложим на правой ветви 1005 равных хорд $OA_1, A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{1004} A_{1005}$ длины t . Рассмотрим ломаную $OB_1 B_2 \dots B_{1005}$, симметричную $OA_1 A_2 \dots A_{1005}$ относительно оси параболы. Очевидно, длина $l(t)$ отрезка $B_{1005} A_{1005}$ непрерывно зависит от t . При $t = \sqrt{2}$ $B_1 A_1 = 2 > t$, тем более $l(t) > t$. При $t = 4020$ ордината точки A_{1005} меньше $1005 \cdot 4020$, значит, ее абсцисса меньше $\sqrt{1005 \cdot 4020} = 2010$, и $l(t) < 2 \cdot 2010 = t$. По теореме о промежуточном значении, найдется значение, при котором $l(t) = t$. В этом случае многоугольник $OA_1 A_2 \dots A_{1005} B_{1005} \dots B_1$ – равносторонний.

б) **Лемма.** Если в выпуклом четырехугольнике две противоположные стороны равны, то в другой паре противоположных сторон меньше та, сумма углов при которой больше.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ сумма углов A и B больше 180° и $AD = BC$. Построим параллелограмм $ABCE$. Треугольник CAD получается из треугольника CAE увеличением угла A , поэтому $CD > CE = AD$. ■

Следствие. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в параболу, $AD = BC$, а точки A и B лежат на дуге CD параболы. Тогда $CD > AB$.

Доказательство. Ясно, что четырехугольник $ABCD$ – часть сегмента параболы, отсеченного хордой CD . Пусть касательные к параболе в точках C и D пересекаются в точке M . Треугольник CMD содержит упомянутый сегмент, а, значит, и четырехугольник $ABCD$. Поэтому $\angle BCD + \angle ADC < \angle MCD + \angle MDC < 180^\circ$. ■

Решение задачи. Пусть нашелся такой 2012-угольник. Занумеруем его вершины в порядке возрастания абсцисс от A_1 до A_{2012} (в этом же порядке они будут появляться при обходе 2012-угольника против часовой стрелки). Применяя 1005 раз вышеприведенное следствие, последовательно получим $A_1A_{2012} > A_2A_{2011} > \dots > A_{1006}A_{1007}$. Противоречие.

5. [7 баллов] Назовем натуральное число *хорошим*, если все его цифры ненулевые. Хорошее число назовем *особым*, если в нем хотя бы k разрядов и цифры идут в порядке строгого возрастания (слева направо).

Пусть имеется некое хорошее число. За ход разрешается приписать с любого края или вписать между любыми его двумя цифрами особое число или же наоборот, стереть в его записи особое число. При каком наибольшем k можно из любого хорошего числа получить любое другое хорошее число с помощью таких ходов? (*А. Бердников*)

Ответ. При $k = 8$. **Решение.** Очевидно, в особом числе не более 9 цифр. Если $k = 9$, то при каждой операции число цифр меняется ровно на 9, то есть остаток от деления на 9 числа его цифр не меняется, и из однозначного числа нельзя сделать двузначное.

Пусть $k = 8$. Поскольку все операции обратимы, то достаточно доказать, что можно вставить любую цифру. Докажем индукцией по n что можно вставить цифру n .

База. Чтобы вставить 1, вставим сначала 123456789, а затем вычеркнем 23456789.

Шаг индукции. Пусть умеем вставлять (и вычеркивать) цифры от 1 до $n - 1 < 9$. Чтобы вставить n , вставим сначала 123456789, сотрем $12\dots(n-1)$ по одной цифре, затем по одной цифре вставим $12\dots(n-1)$ справа от n , и, наконец, вычеркнем число $12\dots(n-1)(n+1)\dots 9$.

6. [7 баллов] Докажите, что при $n > 1$ число $1^1 + 3^3 + 5^5 + \dots + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ делится на 2^n , но не делится на 2^{n+1} . (*С. Сафин*)

Решение. Лемма 1. $k^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$ для каждого нечетного числа k .

Доказательство. $k^{2^n} - 1 = (k - 1)(k + 1)(k^2 + 1)(k^4 + 1)\dots(k^{2^{n-1}} + 1)$ – произведение $n + 1$ четных множителей. Вдобавок один из первых двух множителей делится на 4. ■

Лемма 2. $(k + 2^n)^k \equiv k^k(1 + 2^n) \pmod{2^{n+2}}$ при $n > 1$.

Доказательство. $(k + 2^n)^k = k^k + k \cdot k^{k-1} \cdot 2^n + C_k^2 k^{k-2} \cdot 2^{2n} + \dots$, а все слагаемые, кроме двух первых, делятся на 2^{n+2} . ■

Вернемся к решению задачи. Обозначим сумму из условия через S_n , а разность $S_{n+1} - S_n$ через R_n . Будем вести индукцию по n . *База* ($n = 2$) очевидна.

Шаг индукции. $S_{n+1} = S_n + R_n$. R_n есть сумма 2^{n-1} слагаемых вида m^m , где $m = 2^n + k$, k – нечетное число, меньшее 2^n . По лемме 1 $m^m = m^{2^n} \cdot m^k \equiv m^k \pmod{2^{n+2}}$. Поэтому

$$R_n \equiv (1 + 2^n) + (3 + 2^n)^3 + (5 + 2^n)^5 + \dots \pmod{2^{n+2}}.$$

По лемме 2 $R_n \equiv S_n(1 + 2^n) \pmod{2^{n+2}}$. Значит, $S_{n+1} \equiv 2S_n(1 + 2^n) \pmod{2^{n+2}}$.

По предположению индукции S_n делится на 2^n (значит, S_{n+1} делится на 2^{n+1}) и не делится на 2^{n+1} (значит, S_{n+1} не делится на 2^{n+2}).

7. [9 баллов] 100 красных точек разделили синюю окружность на 100 дуг, длины которых являются всеми натуральными числами от 1 до 100 в произвольном порядке. Докажите, что существуют две перпендикулярные хорды с красными концами. (*В. Произволов*)

Решение. Если найдутся две диаметрально противоположные красные точки K и K' , то для любой другой красной точки L $\angle KLK' = 90^\circ$, то есть хорды KL и LK' – искомые. Пусть диаметрально противоположных красных точек нет.

Далее буквы без штрихов обозначают только красные точки, те же буквы со штрихом – диаметрально противоположные (синие). Если не оговорено противное, то рассматриваются только дуги с красными концами. $|AB|$ обозначает длину кратчайшей дуги между точками A и B , h – длину полуокружности (это целое число, так как общая длина окружности четна). Дугу без внутренних красных точек назовём *простой*.

Назовем *длинной* дугу длины $h - k$, где $1 \leq k \leq 100$. Она составлена из простых дуг, в том числе двух *крайних* – примыкающих к концам длинной дуги. Докажем, что если длины обеих крайних не равны k , то искомые хорды найдутся.

Рассмотрим, где может находиться простая дуга длины k . Она не может примыкать к длинной снаружи (иначе объединение дуг образует полуокружность и есть диаметрально противоположные красные точки). Значит, концы дуг – четыре разные точки. Возможны 2 варианта взаимного расположения.

1) Простая дуга лежит вне длинной. Проведем две пересекающиеся хорды от концов длинной дуги к концам простой. Угол между хордами измеряется полусуммой угловых мер дуг, поэтому он прямой.

2) Простая дуга лежит на длинной. Проведем две непересекающиеся хорды от концов длинной дуги к концам простой. Угол между хордами измеряется полуразностью угловых мер дуги, дополнительной к длинной, и простой дуги, поэтому он прямой.

Осталось доказать, что найдется длинная дуга, для которой дополняющая её до h простая дуга – не крайняя. Дадим два доказательства.

Доказательство 1 (В. Произволов).

Назовем *сверхдлинной* дугу длины $h - k$, где $1 \leq k \leq 50$. Для каждой точки A выберем сверхдлинную дугу с концом в этой точке: если A' лежит на простой дуге BC , и $k = |A'B| \leq |A'C|$, то $k \leq 50$ и выбираем $|AB| = h - k$ (при равенстве $|A'B| = |A'C|$ выбираем обе: AB и AC). Тем самым выбрано не менее 50 сверхдлинных дуг. Докажем, что среди выбранных есть две дуги одинаковой длины. Если нет длины $h - 50$, то длин меньше чем дуг, и равные дуги найдутся по принципу Дирихле. Если длина $h - 50$ есть, она возникла при попадании A' в середину дуги BC длины 100, значит, есть две дуги длины $h - 50$. Обе дуги длины $h - k$ могут иметь крайнюю дугу длины k , только если они пересекаются по этой дуге. Итак, пусть $|DF| = |EG| = h - k$, и они пересекаются по простой дуге EF длины k . Но тогда DE и FG – непересекающиеся длинные дуги длины $h - 2k$, и хотя бы на одной из них не лежит простая дуга длины $2k$.

Доказательство 2 (А. Шаповалов).

Пусть $|BC| = 1$, B', C' лежат на простой дуге RS , $|B'R| = k \leq |C'S| = m$ (см. рис. 1). Если $k = m$, то $|BS| = |CR| = h - (k + 1)$ – непересекающиеся длинные дуги, и на какой-то из них не лежит простая дуга длины $k + 1$.

Далее считаем, что $k < m$, откуда $k \leq 49$.

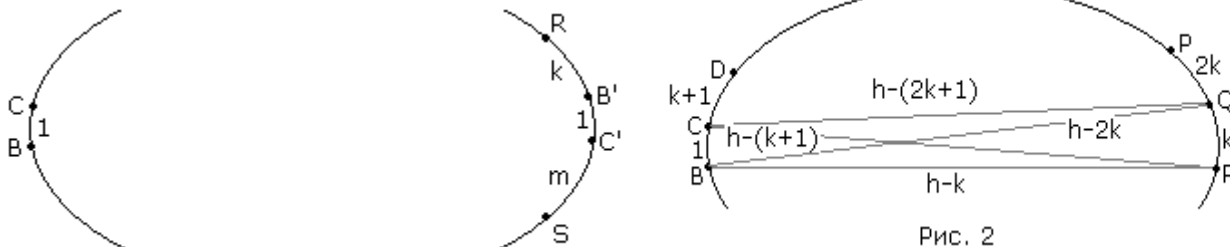


Рис. 1

Рис. 2

Обозначим красные точки так, чтобы дуги $AB, BC, CD, PQ, QR, RS, ST$ были простыми. В частности, мы уже знаем, что $|BC| = 1$, $|RS| = k + m + 1$.

Допустим, что для всех длинных дуг дополняющая простая дуга – их крайняя.

Случай 1. $k > 1$. $|BR| = h - k$. На краях длинной дуги BR лежат простые дуги BC и QR , $|BC| < k$, поэтому $|QR| = k$ (см. рис.2, длины длинных дуг написаны на хордах). $|CR| = h -$

$(k + 1)$, поэтому $|CD| = k + 1$. $|BQ| = h - 2k$, значит, $|PQ| = 2k$. Но тогда $|CQ| = h - (2k + 1)$, а обе длины простых дуг CB и PQ на краях CQ не равны $2k + 1$. Противоречие.

Случай 2. $k = 1$. Тогда $m > 1$,
 $|RS| = m + 2 \leq 100$. $|CS| = h - m$, поэтому $|ST| = m$ (см. рис 3). $|BS| = h - (m + 1)$,
 поэтому $|AB| = m + 1$. Но тогда
 $|AR| = h - m$, однако простая дуга ST длины m не лежит на краю AR . Противоречие.

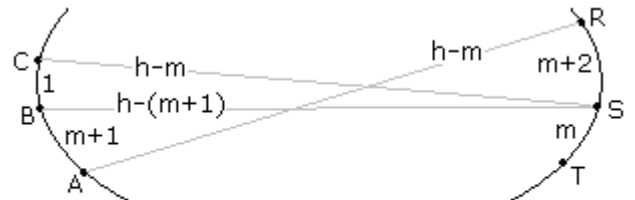


Рис. 3