32-й Международный математический Турнир городов
2010/11 учебный год
Решения задач весенних туров

Л.Э.Медников, А.В.Шаповалов

Базовый вариант, младшие

5.1. [3] По кругу написаны все целые числа от 1 по 2010 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, четна. (*Б. Френкин*)

Решение. Если все ребра многогранника равны, то, очевидно, равны и все его грани, а поскольку их не меньше четырех, найдутся и две нужные нам пары равных граней. Если же не все ребра многогранника равны, то, как легко понять, искомыми будут пара граней, примыкающих к наименьшем ребру, и пара граней, примыкающих к наибольшему ребру.

Пусть все разности рядом стоящих чисел нечетны. Тогда четные и нечетные числа по кругу чередуются. Но это значит, что либо каждое четное число больше обоих соседних нечетных, либо каждое четное число меньше обоих соседних нечетных. В первом случае не найдется места для числа 2, а во втором – для числа 2010. Противоречие.

5.2. [4] Прямоугольник разбили на 121 прямоугольную клетку десятью вертикальными и десятью горизонтальными прямыми. У 111 клеток периметры целые. Докажите, что и у остальных десяти клеток периметры целые. (*А. Шаповалов*)

Решение. Назовем клетки, про периметры которых известно, что они целочислены, *известными*, а остальные клетки – *неизвестными*. Поскольку строк и столбцов в получившейся таблице – по 11, а неизвестных клеток всего 10, мы можем отметить строку и столбец, в которых все клетки – известные. Возьмем неизвестную клетку K. Легко проверить, что ее периметр P равен $P_1 + P_2 - P_0$, где P_1 – периметр клетки отмеченного столбца, стоящей в одной строке с K, P_1 – периметр клетки отмеченной строки, стоящей в одном столбце с K, а P_0 – периметр клетки, стоящей на пересечении отмеченных строки и столбца. Так как все числа P_1, P_2 и P_0 – целые, число P – тоже целое.

5.3. [5] Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее чем за час? (*М. Хачатурян*)

Ответ. Можно. **Решение**. В момент $\frac{1}{2^{10}}$ (часа) от начала процедуры отрежем от червяка $\frac{1}{2^{10}}$ метра. В момент $\frac{1}{2^{9}}$ от выросшей длинной части отрежем $\frac{1}{2^{9}}$ метра. В момент $\frac{1}{2^{8}}$ отрежем $\frac{1}{2^{8}}$ метра, … в момент $\frac{1}{2}$ разрежем взрослого червяка пополам. К исходу часа все отрезанные куски станут взрослыми червями. При этом от первого разрезания прошло только $1-\frac{1}{2^{10}}$ часа.

5.4. [5] Дан выпуклый четырехугольник. Если провести в нем любую диагональ, он разделится на два равнобедренных треугольника. А если провести в нем обе диагонали сразу, он разделится на четыре равнобедренных треугольника. Обязательно ли этот четырехугольник – квадрат? (*В. Шевяков*)

Ответ. Не обязательно. **Решение**. Всем условиям задачи удовлетворяет равнобедренная трапеция с меньшим основанием, равным боковой стороне, и углами в 72° при большем основании.

5.5. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем

а) [2] на 50-й день?

б) [3] на 25-й день? (*Жюри по мотивам А. Шаповалова*)

б) Ответ. Сможет. **Решение**. Сначала разложим монеты на две кучки: в первой 49 монет, в второй – 51 монета. Затем каждый день будем перекладывать по монете из первой кучки во вторую. На 25-й день в первой кучке будет 25 монет, во второй – 75. Стало быть, на 25-й день в первой кучке будет не больше 25 фальшивых и не больше 25 настоящих монет. Если такая же ситуация была и в первый день, то либо фальшивых, либо настоящих монет в первой кучке было ровно 25 штук (иначе всего монет там было бы не больше 48), и рыцарь освободился сразу. Иначе в первый день в первой кучке было больше 25 фальшивых или больше 25 настоящих монет. Заметим, что число как фальшивых, так и настоящих монет в первой кучке каждый день может измениться не больше, чем на 1, по сравнению с предыдущим днем. Поэтому в какой-то из дней между первым и 51-м число фальшивых или настоящих монет в первой кучке будет равно 25, что и требуется.

Базовый вариант, старшие

6.1. [3] Грани выпуклого многогранника – подобные треугольники. Докажите, что многогранник имеет две пары равных граней (одну пару равных граней и еще одну пару равных граней). (*В. Произволов*)

Решение. Если какая-то их граней входит в обе пары, то наибольшее и наименьшее ребро входят в одну грань. Но тогда любая грань не может быть больше этой (иначе там найдется большее ребро) и, аналогично, не может быть меньше. Значит, все грани равны, и найдутся две непересекающиеся пары равных граней.

6.2. [4] См. 5.3.

6.3. [4] По кругу лежат 100 белых камней. Дано целое число k в пределах от 1 до 50. За ход разрешается выбрать любые k подряд идущих камней, первый и последний из которых белые, и покрасить первый и последний камни в черный цвет. При каких k можно за несколько таких ходов покрасить все 100 камней в черный цвет? (*А. Бердников*)

Решение. При тех и только тех, для которых число $d = \dfrac{100}{\text{НОД}(100, k-1)}$ четно. Пометим любой камень. Затем пометим камень, (k–1)-й по часовой стрелке после помеченного, и будем повторять эту процедуру, пока не вернемся к исходному камню. Любые два соседних помеченных камня будут концами ряда из k подряд идущих камней. Поэтому отмеченные камни можно перекрашивать только в паре с отмеченными. Стало быть, их удастся перекрасить тогда и только тогда, когда их четное число, и это число, как нетрудно проверить, равно d. Осталось заметить, что все 100 камней разбиваются на НОД(100, k–1) наборов помеченных.

6.4. [5] Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку. (*Фольклор*)

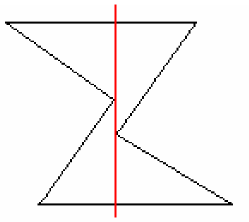
Решение. Пусть O – точка пересечения перпендикуляров, опущенных из вершин A, B, C и D пятиугольника $ABCDE$ на противолежащие стороны. Нетрудно убедиться, что точка O не может совпадать с вершиной пятиугольника. Пусть $OA \perp CD$. Тогда $OA \cdot (OC - OD) = 0$, т.е. $OA \cdot OC = OA \cdot OD$. Аналогично из $OB \perp DE$, $OC \perp EA$, $OD \perp AB$ получаем равенства $OB \cdot OD = OB \cdot OE$, $OC \cdot OE = OC \cdot OA$, $OD \cdot OA = OD \cdot OB$. Но тогда и $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE}$, т.е. $OE \cdot CB = 0$. Значит, $OE \perp BC$.

6.5. [5] В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечетное число главных дорог. (*А. Шень*)

Решение. Разобьем все вершины на пары и соединим каждую пару своим маршрутом. Посчитаем для каждого ребра *кратность*: число маршрутов, в которые оно вошло. Сумма кратностей для выходящих из вершины ребер нечетна: свой маршрут дает вклад 1, а остальные – 0 или 2. Значит, из каждой вершины выходит нечетное число ребер нечетной кратности. Их и объявим важными.

2-е решение. Рассмотрим граф городов и дорог и докажем по индукции, что факт верен для любого связного графа с четным числом $2k$ вершин. При $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно уже доказано для всех k, меньших данного n. Возьмем связный граф на $2n$+2 вершинах и выделим в нем остовное дерево. В этом дереве возьмем любую висячую вершину A и рассмотрим вершину B, к которой она прикреплена. Если к вершине B прикреплено нечетное число висячих вершин, объявим главными все ребра, ведущие из B в висячие вершины, удалим B и эти висячие вершины вместе со всем выходящими из них ребрами и применим предположение индукции к оставшемуся графу. В противном случае применим предположение индукции к графу, который получается удалением всех висячих вершин, прикрепленных к B, а потом дополнительно объявим главными все ребра из B в висячие вершины.

Сложный вариант, младшие



7.1. [4] Можно ли какой-нибудь шестиугольник разбить одной прямой на четыре равных треугольника? (*Н. Стрелкова*)

Ответ. Можно. См. рисунок.

7.2. [4] Через начало координат проведены прямые (включая оси координат), которые делят координатную плоскость на углы в 1°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 100 - x$. (*А. Шаповалов*)

Ответ. 8950. **Решение**. Картинка симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому сумма абсцисс равна сумме ординат. Через начало координат проведено 180 прямых, прямая $y = 100 - x$ пересекает 179 из них. Для каждой точки на прямой $y = 100 - x$ сумма координат равна 100, значит, общая сумма абсцисс и ординат равна 17900, а сумма абсцисс – вдвое меньше.

7.3. [5] У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь – различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь – четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные – на другую так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой? (*А. Толпыго*)

Ответ. Могут. **Решение**. Пусть у барона гири всех четных весов – от 2 до 100. Допустим, нам удалось разложить все и получить равновесие. Тогда равенство сохранится, если все веса разделить на 2. Однако гири весами 1, 2, …, 50 так разложить нельзя, так как сумма их весов нечетна.

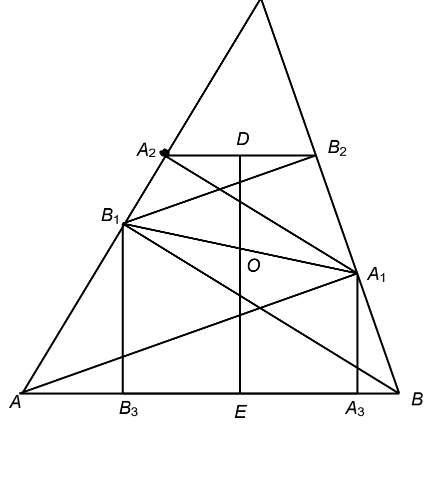
7.4. [6] Докажите, что для любого натурального числа N найдутся такие две пары натуральных чисел, что суммы в парах одинаковы, а произведения отличаются ровно в N раз. (*Б. Френкин*)

Решение. Например, подойдут пары $(4N - 2, 1)$ и $(2N, 2N - 1)$ или $(N^2 + N, 1)$ и $(N^2, N + 1)$.

7.5. [7] Дан остроугольный треугольник ABC; AA_1, BB_1 – его высоты. Из точки A_1 опустили перпендикуляры на прямые AC и AB, а из точки B_1 опустили перпендикуляры на прямые BC и BA. Докажите, что основания перпендикуляров образуют равнобокую трапецию. (*Г. Фельдман*)

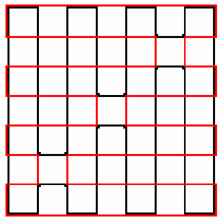
Решение. Пусть A_1A_2 и A_1A_3 (B_1B_2 и B_1B_3) – перпендикуляры, опущенные из точки A_1 (B_1) соответственно на прямые AC (BC) и AB. Как известно, треугольник B_1CA_1 подобен треугольнику ABC. Треугольник A_2CB_2 соответственно подобен треугольнику B_1CA_1, а значит и треугольнику ABC. Поэтому прямые A_2B_2 и AB параллельны, т.е. $A_2B_2A_3B_3$ – трапеция.

Опустим перпендикуляры OD и OE из середины O отрезка A_1B_1 на основания трапеции A_2B_2 и A_3B_3. Так как углы $A_1A_2B_1$ и $B_1B_2A_1$ прямые, O – центр окружности, описанной около четырехугольника $B_1A_2B_2A_1$. Поэтому D – середина A_2B_2. Отрезок OE параллелен основаниям трапеции $A_1A_3B_3B_1$, и потому является ее средней линией.



Значит, E – середина A_3B_3. Таким образом, трапеция $A_2B_2A_3B_3$ симметрична относительно DE, и, следовательно, равнобока.

7.6. [10] Два муравья проползли каждый по своему замкнутому маршруту на доске 7×7. Каждый полз только по сторонам клеток доски и побывал в каждой из 64 вершин клеток ровно один раз. Каково наименьшее возможное число таких сторон, по которым проползали и первый, и второй муравьи? (*А. Заславский*)



Ответ. 16 сторон. **Решение**. *Пример* приведен на рисунке (один маршрут черный, другой – красный).

Оценка. Каждый из муравьев посетил по 64 разные стороны. Всего сторон $7\cdot8\cdot2 = 112$. Следовательно, дважды посещенных сторон хотя бы $64 + 64 - 112 = 16$.

7.7. [10] Дана квадратная таблица, в каждой клетке записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$. (*R. Barat*)

Решение. Пусть в таблице n строк. Возьмем в каждой строке по два наибольших числа и выпишем эти $2n$ чисел в порядке возрастания. Ввиду равенства сумм в пары входят первое и последнее, второе и предпоследнее и т.д. Отметим в таблице n+1 наибольших из выписанных чисел. По принципу Дирихле найдутся два отмеченных числа в одном столбце; их сумму обозначим через s. По условию, $s \le b$. С другой стороны, s не меньше суммы двух наименьших из отмеченных чисел, а это как раз центральная пара из выписанных чисел, и ее сумма равна a. Значит, $a \le s \le b$. Аналогично доказывается, что $b \le a$.

2-е решение. Пусть $a > b$. Числа в таблице, не меньшие $^a/_2$, назовем *большими*. В каждом столбце не больше одного большого числа. В каждой строке не меньше одного большого числа. Тогда всего в ней не больше и не меньше, чем n больших чисел, то есть их ровно n, причем в каждой строке и в каждом столбце ровно по одному большому числу. Пусть x – наименьшее большое число. В его строке найдется число $a - x$, которое не является большим. В столбце последнего найдется большое число, оно не меньше x. Мы нашли столбец и два числа в нем, сумма которых не меньше a, то есть больше b. Противоречие.

Сложный вариант, старшие

8.1. [4] См. 7.3.

8.2. [6] В пространстве с декартовой системой координат дан прямоугольный параллелепипед, вершины которого имеют целочисленные координаты. Его объем равен 2011. Докажите, что ребра параллелепипеда параллельны координатным осям.
(*М. Манкин*)

Решение. По теореме Пифагора длины ребер равны $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, где числа $a \le b \le c$ – натуральны. Тогда квадрат объема $2011^2 = abc$. Поскольку 2011 – простое число, то $a = 1$. Для b и c возможны два случая: $b = 1$, $c = 2011$ или $b = c = \sqrt{2011}$. Ребро длины 1 идет, очевидно, по линии сетки. В случае $a = b = 1$ ребро c перпендикулярно двум линиям сетки и поэтому тоже идет по сетке. В случае $b = c$ ребра b и c лежат в плоскости, перпендикулярной линии сетки. Но тогда 2011 должно представляться как сумма двух квадратов. Однако 2011 имеет остаток 3 по модулю 4, а для суммы квадратов такое невозможно.

8.3. От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.

а) [3] Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?

б) [4] Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой – равносторонним треугольником со стороной 2? (*П. Сергеев (б), А. Шаповалов (а)*)

а) **Ответ**. Могут. **Решение**. Возьмем неравносторонний треугольник T и выберем в нем две различные стороны a и b. Возьмем также треугольник U, подобный T с коэффициентом $^a/_b$. Приставим их друг к другу сторонами длины a так, чтобы они не лежали в одной плоскости. Две свободные вершины этих треугольников задают направление бокового ребра призмы, которое сделаем достаточно большим, чтобы призма имела непересекающиеся сечения, равные T и U.

б) **Ответ**. Не может. **Решение**. Предположим, что такие спилы получились. Расстояния между боковыми ребрами призмы не превышают длины стороны треугольника, соединяющей точки на этих ребрах, то есть не больше 1. Будем считать, что боковые ребра идут вертикально. Проведем через вершины большего спила три горизонтальные плоскости. Пусть вторая плоскость лежит между первой и третьей, и расстояния от нее до двух других равны a и b. Тогда стороны большого треугольника станут диагоналями прямоугольников ширины, равной расстоянию между соответствующими боковыми ребрами, а высоты равны a, b и $a + b$. Но если ширина прямоугольника с высотой a не больше 1, а длина диагонали равна 2, то $a \ge \sqrt{3}$. Аналогично $b \ge \sqrt{3}$. Но тогда высота третьего прямоугольника
$a + b \ge 2\sqrt{3} > 2$, тем более его диагональ больше 2. Противоречие.

8.4. Даны N синих и N красных палочек, причем сумма длин синих палочек равна сумме длин красных. Известно, что из синих палочек можно сложить N-угольник, и из красных – тоже. Всегда ли можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю – в красный цвет, а красную – в синий) так, что снова из синих палочек можно будет сложить N-угольник, и из красных – тоже? Решите задачу

а) [4] для $N = 3$;

б) [4] для произвольного натурального N, большего 3. (*А. Грибалко*)

а) Ответ. Не всегда. **Решение**. Пусть длины синих палочек 12, 17, 20, а красных – 2, 23, 24. Поскольку единственная пара с разностью меньше 2 – это (23, 24), а после перекрашивания палочка 2 попадет в другую по составу тройку, то в ней разность наибольших сторон будет больше 2, и треугольник сложить будет нельзя.

б) Ответ. Не всегда. **Решение**. Пусть $k = N - 2$. Пусть длины двух синих палочек равны $12k + 5$ и $24k - 4$, а длины остальных k равны 12; длины двух красных палочек равны $24k - 1$ и $24k$, а длины остальных равны $^2/_k$. Если перекрашена одна из длинных красных палочек, то разность между получившимися длинными красными палочками больше 2, и палочками длины $^2/_k$ ее не покрыть.

Пусть синей стала палочка $^2/_k$. Если палочка длины $24k - 5$ осталась синей, то сумма остальных синих не превосходит $^2/_k + 12(k - 1) + 12k + 5 < 24k - 4$. Если палочка длины $24k - 4$ стала красной, то наибольшей синей стала палочка длины $12k + 5$, но сумма остальных синих равна $12k + {}^2/_k < 12k + 5$. В обоих случаях синий многоугольник не складывается.

8.5. [8] Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2, касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β. Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD, расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются. (*Ф. Ивлев*)

Решение. Пусть O – точка пересечения прямых AB и CD, Ω_1 и Ω_2 – окружности, симметричные ω_1 и ω_2 относительно биссектрисы угла AOD. Рассмотрим окружности Ω_4 и Ω_3, полученные из Ω_1 и Ω_2 инверсией относительно окружности с центром O и радиусом $R = \sqrt{OA\cdot OC} = \sqrt{OB\cdot OD}$. Они, очевидно, касаются. При этом Ω_4 проходит через точки C и D и может быть получена из Ω_1 не только инверсией, но и гомотетией с центром и коэффициентом $OD{:}OA = OC{:}OB$. Поэтому градусная мера дуги CD в Ω_4 равна α. Следовательно, Ω_4 совпадает с ω_4. Аналогично Ω_3 совпадает с ω_3.

8.6. [8] См. 7.7.

8.7. [11] Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 11 всем известных гениев. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает прием, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять 10 гениев, как бы ни действовала первая фирма? (*А. Шаповалов*)

Ответ. Могут. **Решение**. Пусть множество программистов описывается множеством всевозможных строк из 11 неотрицательных целых чисел с суммой 100. Гении – те, у кого все эти числа, кроме одного – нулевые (а ненулевое равно 100). Ясно, что гениев ровно 11. Объявим знакомыми тех, у которых две “координаты” отличаются на 1 (одна больше на 1, другая меньше на 1), а остальные совпадают.

Покажем, как Второй фирме нанять 10 гениев. Пусть $A = (A_1, A_2, \ldots, A_{11})$ – первый, нанятый Первой фирмой. В этой строке есть число не меньше 10 (пусть это A_{11}). Тогда Вторая фирма должна нанять программиста $B = (A_1 + 1, A_2 + 1, \ldots, A_{10} + 1, A_{11} - 10)$.

Пусть $M_i = \max C_i$ по всем строкам программистов C, нанятых на данный момент Второй фирмой, а m_i – то же, но для Первой фирмы. Наняв B, Вторая фирма обеспечила неравенство $M_i > m_i$ для каждого $i \le 10$. Если Вторая фирма сможет поддерживать своими ходами такие неравенства, то она раньше Первой фирмы достигнет $M_i = 100$ (при всех $i \le 10$), то есть наймет тем самым 10 гениев. Покажем, почему это возможно.

Из-за необходимости нанимать знакомых Первая фирма может на каждом ходу увеличить не более одного из чисел m_i ($i \le 10$), причем не больше, чем на 1, то есть, только одно из m_i может «догнать» M_i. Пусть такое равенство случилось, и $M_i = m_i = d < 100$. Значит, Второй фирмой уже нанята строка S с $S_i = d$. Так как $d < 100$, $S_j > 0$ дляя некоторого $j \ne i$. Пусть T – знакомый S, у которого $T_i = S_i + 1$, $T_j = S_j - 1$. Так как
$T_i > M_i$.и $T_i > m_i$., T еще никем не нанят. Наняв T, Вторая фирма увеличит M_i и восстановит неравенство $M_i > m_i$.

Равенство $m_i = M_i = 100$ невозможно, так как i-е число равно 100 только у одной строки. Если равенства не случилось, то Вторая фирма может ответным ходом увеличить на 1 любое $M_i < 100$ (для $i \le 10$). Если таких M_i нет, то 10 гениев уже наняты.

2-е решение. Кроме гениев G_1, …, G_{11} рассмотрим 11 *ключевых* программистов K_1, …, K_{11}. Соединим каждую пару (G_i, K_j) *цепочкой* из $70 + r_{ij}$ *рядовых* программистов, где r_{ij} – остаток от деления $i - j$ на 11 (“внутренние” члены цепочек знакомы только с двумя своими соседями по цепочке).

Покажем как действовать Второй фирме.

1) Пусть Первая фирма вначале нанимает одного из ключевых программистов (в силу симметрии можно считать, что это K_1). Тогда Вторая фирма нанимает K_2, который находится *ближе* к G_2, …, G_{11}, чем K_1. Поэтому если Первая фирма пытается двигаться по “своим” цепочкам к одному из этих гениев, то Вторая фирма, двигаясь к тем же гениям, ее опережает. Если же Первая фирма пытается двигаться к G_1 (на что ей нужно не менее 71 хода), то Вторая использует это время для уменьшения всех “расстояний” до остальных[гениев до 70 (для этого ей нужно не более 2 + … + 11 = 65 ходов). Поэтому гораздо раньше, чем Первая фирма сможет использовать ведущие к гениям более короткие це-почки, Вторая будет ее опережать на 10 “направлениях”.

2) Пусть Первая фирма вначале нанимает G_1. Тогда Вторая фирма нанимает K_1. Прежде, чем Первая фирма сможет нанять ключевого программиста (только через него можно выйти на другого гения), Вторая, как и в 1-м случае, сможет укоротить 10 цепочек до 70 и снова опередит Первую.

3) Наконец, пусть Первая фирма вначале нанимает рядового программиста из цепочки, соединяющей K_1 с G_i. Тогда Вторая фирма нанимает K_1. Первой остается только двигаться к G_i и получается ухудшенный (для Первой фирмы) 2-й случай.

www.ashap.info