31-й Международный математический Турнир городов

2009/10 учебный год

Решения задач

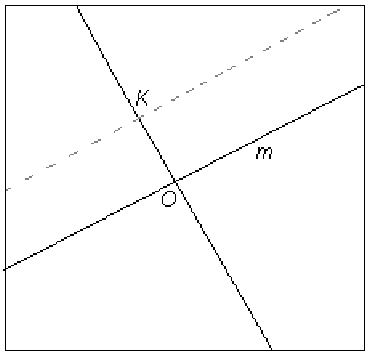
Весенние туры

Базовый вариант, младшие классы

5.1. [3] В шести корзинах лежат груши, сливы и яблоки. Число слив в каждой корзине равно числу яблок в остальных корзинах вместе взятых, а число яблок в каждой корзине равно числу груш в остальных корзинах вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31. *(М.Мурашкин, А.Шаповалов)*

Решение. Сложив равенства для слив и яблок по всем корзинам, получим что общее число слив в 5 раз больше числа яблок. Аналогично, общее число яблок в 5 раз больше общего числа груш, то есть в 25 раз больше общего числа слив. Итого, общее число фруктов 31 раз больше общего числа груш.

5.2. [3] Малыш и Карлсон режут квадратный торт. Карлсон выбирает на нем точку (не на границе). После этого Малыш делает прямолинейный разрез от выбранной точки до края (в любом направлении). Затем Карлсон проводит второй прямолинейный разрез от выбранной точки до края, перпендикулярный первому, и отдает меньший из получившихся двух кусков Малышу. Малыш хочет получить хотя бы четверть торта. Может ли Карлсон ему помешать? *(М.Мурашкин)*



Решение. Нет. Малыш проводит разрез через выбранную Карлсоном точку K и центр O торта (если Карлсон выбрал O, проводит любой возможный разрез). Прямая m, проведенная через O перпендикулярно KO, вместе с KO делят торт на 4 одинаковых куска. Оба куска, которые может отсечь Карлсон (отрезком, параллельным m), не меньше этих четвертинок.

5.3. Нарисован угол, и еще имеется только циркуль.

а) [2] Какое наименьшее число окружностей надо провести, чтобы наверняка определить, является ли данный угол острым?

б) [2] Как определить, равен ли данный угол 31° (разрешается проводить сколько угод-но окружностей)? *(Г.Фельдман, Д.Баранов)*

Решения. а) Одну. Проведем окружность с центром на стороне угла, проходящую через его вершину O. Если она пересечет другую сторону угла, угол был острым.

б) Проведем окружность с центром O. Пусть она пересекает стороны угла в точках A и B. Начиная с точки A, будем откладывать на этой окружности хорды, равные AB. Если отложив 360 таких хорд, мы обойдем окружность ровно 31 раз, то $\angle AOB = 31°$.

5.4. [5] Среди участников олимпиады каждый знаком не менее чем с тремя другими. Докажите, что можно выбрать группу из четного числа участников (больше двух человек) и посадить их за круглый стол так, чтобы каждый был знаком с обоими соседями. *(Фольклор)*

Решение. Построим из участников самый длинный ряд так, чтобы знакомые стояли рядом. Все трое знакомых крайнего (обозначим его A) должны быть в ряду (иначе ряд можно удлинить). Обозначим через B и C тех знакомых, которые не стоят рядом с A. Если между A и B (A и C) стоит четное число человек, то они вместе с A и B (A и C) образуют искомую группу. Если же оба эти числа четны, то между A и C стоит *нечетное* число человек, и они вместе с A, B и C образуют искомую группу

5.5. [5] На доске записано 101 число: 1^2, 2^2, …, 101^2. За одну операцию разрешается стереть любые два числа, а вместо них записать модуль их разности. Какое наименьшее число может получиться в результате 100 операций? *(М.Малкин)*

Ответ. 1. **Решение.** Из четырех последовательных квадратов (за 3 операции) можно получить число 4:

$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, $(n + 3)^2 - (n + 2)^2 = 2n + 5$, $(2n + 5) - (2n + 1) = 4$.

Получим так 24 четверки из чисел 6^2, 7^2, …, 101^2. 20 четверок попарным вычитанием превратим в нули. Из чисел 4, 9, 16, 25 получим $14 = (25 - 4) - (16 - 9)$.

$$4 - (14 - 4 - 4 - 4) - 1 = 1.$$

Базовый вариант, старшие классы

6.1. [3] Из Южной Америки в Россию 2010 кораблей везут бананы, лимоны и ананасы. Число бананов на каждом корабле равно числу лимонов на остальных кораблях вместе взятых, а число лимонов на каждом корабле равно числу ананасов на остальных кораблях вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31. *(М.Мурашкин, А.Шаповалов)*

Решение. Аналогично решению 5.1, общее число бананов в 2009 раз больше числа лимонов, которое в 2009 раз больше числа ананасов. Поэтому общее число фруктов в $2009^2 + 2009 + 1$ раз больше числа ананасов. Так как $2009 \equiv -6 \pmod{31}$, то

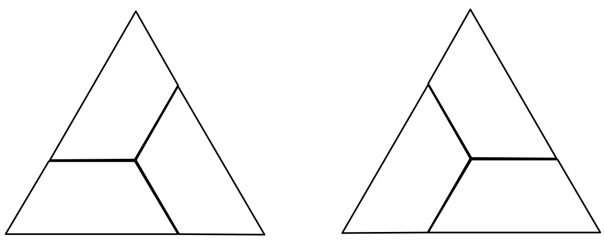
$$2009^2 + 2009 + 1 \equiv (-6)^2 - 6 + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

6.2. [4] Про функцию $f(x)$ известно следующее: любая прямая на координатной плоскости имеет с графиком $y = f(x)$ столько же общих точек, сколько с параболой $y = x^2$. Докажите, что $f(x) \equiv x^2$. *(А.Шаповалов)*

Решение. Проведем касательную l к параболе в произвольной точке $A(a, a^2)$. Эта касательная имеет с графиком Г функции $f(x)$ ровно одну общую точку. Точки под этой касательной не могут принадлежать Г, поскольку каждая из них лежит на параллельной l прямой, не имеющей общих точек с Г. Точки прямой l, отличные от A, также не могут принадлежать Г: каждая из них находится под какой-то другой касательной к параболе. Следовательно, точка A (а значит, и любая точка параболы) принадлежит Г.

6.3. [5] Можно ли поверхность октаэдра оклеить несколькими правильными 6-угольниками без наложений и пробелов? *(Н.Авилов)*

Решение. Да. Окрасим 8 граней октаэдра в шахматном порядке. Белые грани разрежем на половинки 6-угольников, как показано на левом рисунке, а черные – как на правом. При любой стыковке соседних граней половинки 6-угольников склеиваются в целые 6-угольники.



6.4. [5] Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон? *(С.Маркелов)*

Решение. Барон всегда прав. Пусть $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ и $P(2) = b$. Тогда $b = 2^na_n + \ldots + 2a_1 + a_0 > a_n + \ldots + a_1 + a_0 \Rightarrow b$ больше каждого из коэффициентов.

Обозначим p_0=$P(P(2))$=$P(b)$= $a_nb^n + \ldots + a_1b + a_0$. Поделив p_0 на b с остатком, получим в остатке a_0, а в частном – p_1.= $a_nb^{n-1} + \ldots + a_2b + a_1$. Аналогично, поделив p_1 на b с остатком, получим в остатке a_1, а в частном – p_2, и т.д.

6.5. [6] На плоскости лежит игла. Разрешается поворачивать иглу на 45° вокруг любого из ее концов. Можно ли, сделав несколько таких поворотов, добиться того, чтобы игла вернулась на исходное место, но при этом ее концы поменялись местами? *(А.Грибалко)*

Решение. Пусть вначале конец A иглы находится в точке (0, 0), а конец B – в точке (1, 0). Назовем *весом* пары чисел ($a + b\sqrt{2}$, $c + d\sqrt{2}$) (a, b, c, d – рациональные) число $a + 2b + c$. Заметим, что при любом возможном положении иглы вес пары координат вектора $\overline{AB}$ равен ±1. Теперь по индукции легко доказать, что вес пары координат точки A всегда четный, а вес пары координат вектора B – нечетный. Поэтому поменяться местами они не могут.

Сложный вариант, младшие классы

7.1. [3] Есть кусок сыра. Разрешается выбрать число $a \neq 1$ и разрезать этот кусок в отношении 1:a по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, чтобы после конечного числа разрезаний разложить весь сыр на две кучки равного веса? *(А.Шаповалов)*

1-е решение. Можно. Разрезание в отношении 1:a равносильно отрезанию доли $a/(a+1)$. Выберем такое a, чтобы $a/(a+1) = 1/\sqrt{2}$, и разрежем во второй раз наибольший из кусков. Тогда самый большой из полученных кусков равен половине всего сыра.

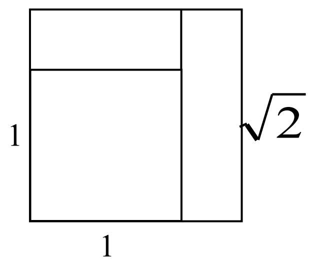


Иллюстрация: От куска площади 2 отрезаем полоски одинаковой ширины ($\sqrt{2} - 1$), и остается кусок площади 1.

2-е решение. Разрежем оба куска, получившихся при первом разрезании. Получатся 4 куска, чьи веса относятся как 1:a:a:a^2. Достаточно выбрать такое a, чтобы $1 + 2a = a^2$. Положительный корень этого уравнения $a = 1+\sqrt{2}$.

7.2. [4] В треугольнике ABC точка M – середина стороны AC, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что BO=BP. Найдите отношение OM к PC. *(М. Волчкевич)*

Ответ: 1:2. **Решение.** Проведем среднюю линию MN треугольника ACP (параллельную AP) . По теореме Фалеса $OM/PN=BO/BP$, поэтому $OM = PN = \frac{1}{2}\,PC$.

7.3. На окружности расставлены 999 чисел, каждое равно 1 или –1, причем не все числа одинаковы. Возьмем все произведения по 10 подряд стоящих чисел и сложим их.

а) [3] Какая наименьшая сумма может получиться?

б) [3] А какая наибольшая? *(А.Толпыго)*

Ответы. а) –997. **б**) 995.

Решение. а) *Оценка*. Если два соседних произведения равны, то первое число левого равно последнему числу правого, то есть равны числа через 10 мест. Так как 10 и 999 взаимно просты, то шагая по 10, мы обойдем все числа. Но среди чисел есть разные, значит и среди произведений – тоже. Итак, есть хотя бы одно произведение, равное 1.

Вот *пример*, где ровно одно произведение равно 1, а остальные 998 – по –1: если номер числа оканчивается на 9, ставим –1, иначе 1. Тогда единственное положительное произведение – с 999-го места по 9-е.

б) *Пример*. Две –1 рядом, остальные 1. Тогда отрицательными будут только те произведения, куда одна –1 входит, а другая – нет, то есть ровно 2.

Оценка. Произведение всех произведений равно 10-й степени произведения всех чисел, то есть равно 1. Значит, среди произведений четное число минус единиц, то есть не меньше двух.

7.4. [6] Сумма цифр натурального числа n равна 100. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться 1000000? *(А.Канель-Белов)*

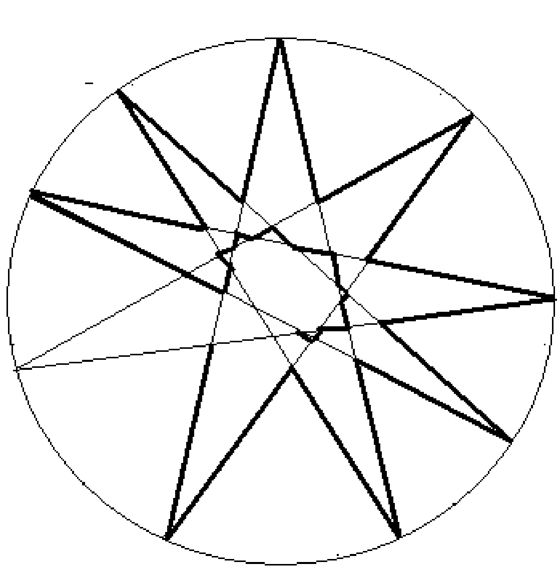
Ответ: может. **Решение.** Достаточно взять число, у которого единицы стоят на 1-м, 10-м, 100-м, ..., 10^{99}-м месте (считая справа).

Идеология. Рассмотрим многочлен $(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{99})^3$. Каждый из его коэффициентов равен 1, 3 или 6, а сумма коэффициентов равна 100^3 (она получается, когда мы все переменные заменим единицами). Если вместо x_k подставить 10^{p_k} так, что всем одночленам соответствуют *разные степени десятки*, то наши коэффициенты превратятся в цифры числа $(1+10^{p_1}+\ldots+10^{p_{99}})^3$. Требуемое условие выполняется, если $p_{k+1} > 3p_k$ ($k = 0, \ldots, 99$, $p_0 = 0$). Действительно, пусть $i \ge j \ge k$, $l \ge m \ge n$, $i > l$. Одночлену $x_ix_jx_k$ соответствует $10^{p_i+p_j+p_k} > 10^{p_i} > 10^{3p_l} > 10^{p_l+p_m+p_n}$, что соответствует одночлену $x_lx_mx_n$.

7.5. **а)** [3] Три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?
б) [5] А если богатырей десять? *(А.Клячко, Е.Френкель)*

Ответ: могут (в обоих случаях). **Решение.** Если богатыри стартуют из одной точки, и для каждой пары их скоростей u и v числа $u/(u–v)$ и $v/(u–v)$ – целые, то все обгоны происходят в точке старта. Для трех богатырей подойдут скорости 2, 3 и 4. Для большего числа богатырей скорости строятся по индукции: по набору $u, v, \ldots, w$ строится набор $p - u, p - v, \ldots, p - w, p$, где $p = u\cdot v\cdot\ldots\cdot w$.

7.6. [8]. На плоскости дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная, в которой 31 звено (соседние звенья не лежат на одной прямой). Через каждое звено провели прямую, содержащую это звено. Получили 31 прямую, некоторые, возможно, совпали. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться? *(А.Толпыго)*



Ответ: 9. **Решение.** *Оценка.* Кроме концов, на ломаной 30 вершин, и каждая является пересечением двух прямых. Если прямых не более восьми, то точек пересечения не более 7·8/2 = 28 < 30 – противоречие. *Пример* – на рисунке.

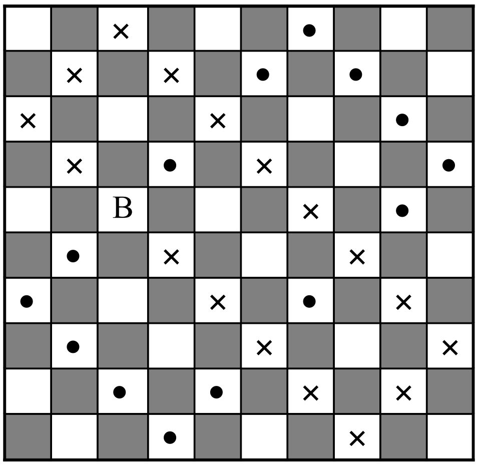
7.7. [11] На некоторых клетках доски 10×10 сидит по блохе.
Раз в минуту блохи одновременно прыгают, причем каждая – в соседнюю клетку (по стороне). Блоха прыгает строго в одном из четырех направлений,

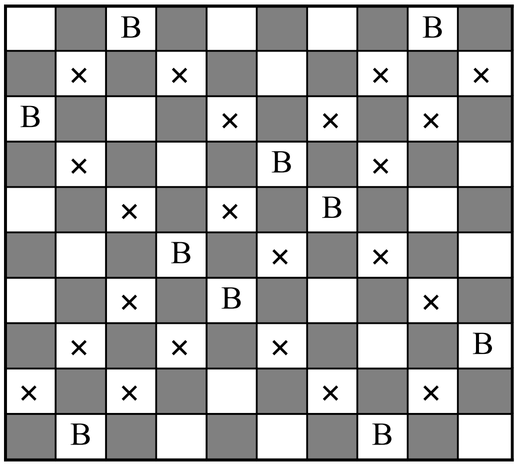
параллельных сторонам доски, сохраняет направление, пока это возможно, иначе меняет его на противоположное. Пес Барбос наблюдал за блохами в течение часа и ни разу не видел, чтобы две из них сидели на одной клетке. Какое наибольшее количество блох могло прыгать по доске? *(М.Мурашкин)*

Ответ: 40. **Решение.** *Оценка.* На одной вертикали может быть не более двух блох, прыгающих по вертикали (иначе блохи, находящиеся в клетках одного цвета, встретятся). То же верно для горизонталей. Итого на 20 горизонталях и вертикалях – не более 40 блох.

Пример. Ясно, что блохи с клеток разных цветов не смогут встретиться. Поэтому достаточно указать только 20 «белых» блох («расположение черных» блох можно получить, например, симметрией относительно средней линии).

На левом рисунке нарисована одна «вертикальная» блоха В и все запрещенные положения «горизонтальных» блох, (то есть те, начиная с которых, «горизонтальная» блоха может оказаться с В на одной клетке). Как видим, запрещенные клетки образуют два прямоугольника, построенных на проходящих через В диагоналях. На правом рисунке размещены 10 «вертикальных» блох и все запрещенные ими положения «горизонтальных». Мы видим, что в каждой горизонтали осталась хотя бы одна незапрещенная белая клетка, куда можно посадить «горизонтальную» блоху.





Базовый вариант, старшие классы

8.1. [3] Можно ли все прямые на плоскости разбить на пары перпендикулярных прямых так, чтобы каждая прямая вошла ровно в одну пару? *(А.Шаповалов)*

Решение. Можно. Если прямая не параллельна осям координат, то парная к ней пересекается с ней на оси Oy. Для прямой, параллельной одной из осей, парная пересекается с ней на биссектрисе первого координатного угла.

8.2. а) [2] Есть кусок сыра. Разрешается выбрать иррациональное a и разрезать этот кусок в отношении $1{:}a$ по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, чтобы после конечного числа разрезаний разложить весь сыр на две кучки равного веса?

б) [2] Тот же вопрос, но выбирается рациональное $a \neq 1$. *(А.Шаповалов)*

Ответ. а) Можно. **б**) Нельзя. **Решение. а**) См. реш. 7.1

б) Допустим противное: после нескольких разрезаний удалось разбить все куски на две равные кучки. Без ограничения общности можно считать, что мы резали на каждом шагу *все* имеющиеся куски. После k шагов получились куски, чьи веса относятся как $1{:}a{:}a^2$:

…:a^k, причем 1 и a^k соответствует ровно по одному куску. Подставив вместо a несократимую дробь $^m/_n$ и умножив все веса на подходящую константу, получим целые веса n^k, mn^{k-1}, ..., m^k. Но m и n взаимно просты, поэтому вес одной кучки кратен m, а другой, где есть кусок веса n^k, – не кратен. Противоречие.

8.3. [6]. Можно ли, применяя к числу 1 функции sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg в некотором порядке, получить число 2010? (Каждую функцию можно использовать сколько угодно раз.) *(С.Маркелов)*

Ответ: можно. **Решение.** Пусть $f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

По индукции проверим, что $g^n(x) = g(g^{n-1}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. Взяв $n = 2010^2 - 1$, получим что $g^n(1) = {}^1/_{2010}$, откуда $f(g^n(1)) = 2010$.

8.4. [6] На съезд собрались 5000 кинолюбителей, каждый видел хотя бы один фильм. Их делят на секции двух типов: либо обсуждение фильма, который все члены секции видели, либо каждый рассказывает о виденном фильме, который больше никто в секции не видел. Докажите, что всех можно разбить ровно на 100 секций. (Разрешены секции и из одного человека: он пишет отзыв о виденном фильме.) *(И.Митрофанов)*

Решение. Достаточно распределить участников съезда не более чем по 100 секциям: потом число секций можно поднять до 100, деля их на произвольные части.

Если есть популярный фильм, который видели больше 100 человек, выделим их всех в отдельную секцию. Если теперь есть популярный фильм, который видели больше 99 из оставшихся, выделим их в следующую секцию, и т.д. У нас закончатся либо люди, либо популярные фильмы. Если закончились люди, то 101 секция образоваться не могла, так как в них вошло бы не менее $101 + 100 + 99 + ... + 2 + 1 > 5000$ человек. Пусть закончились популярные фильмы. Тогда уже есть $100 - k$ секций, и среди оставшихся участников каждый фильм видело не более k человек. Выделим k комнат для еще k секций. Берем любой фильм, распределяем видевших его по разным комнатам и поручаем им рассказывать об этом фильме. Так же поступаем с видевшими следующий фильм, и так пока люди не кончатся.

8.5. [7] Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга? *(А.Клячко, Е.Френкель)*

Ответ и решение: см. 7.5

8.6. [8] Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I.Точки M и N – середины сторон AB и CD. Известно, что $IM/AB = IN/CD$. Докажите, что $ABCD$ - трапеция или параллелограмм. *(Н.Белухов, А.Заславский)*

Решение. Прямые AI, BI, CI, DI – биссектрисы углов четырехугольника. Поэтому сумма углов AIB и CID равна 180°. Если угол AIB острый, а угол CID тупой, то $IM > {}^1/_2\, AB$ (это становится очевидным после построения окружности с диаметром AB), а $IN < {}^1/_2\, CD$, что противоречит условию . Значит, $\angle AIB$ (= $\angle CID$) = 90°. Следовательно, $\angle A + \angle B = 180°$, то есть $BC \parallel AD$.

Замечание. Описанный параллелограмм – ромб.

8.7. [9] Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345 + 6 + 789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций. *(А.Толпыго)*

Решение. На самом деле хватит 4 операций. Для чисел меньших тысячи – очевидно. Иначе разобьем число на четырехзначные куски (не начинающиеся с нуля) плюс, возможно, нули, плюс, возможно, одно меньшее число в конце (например, $12300004500060 = 1230 + 0 + 0 + 0 + 4500 + 0 + 60$). Если получилось k четырехзначных кусков, то сумма не меньше $1000k$. Будем теперь по одному заменять ненулевые слагаемые на сумму их цифр. В конце она будет не больше $36k + 27 < 100k$. Значит, количество разрядов в сумме уменьшится. Но так как на каждом шаге сумма уменьшалась меньше чем на 9999, то последняя сумма перед уменьшением количества разрядов выглядела так: $10....0abcd$. Давайте именно эту сумму и получим при первой операции. Далее достаточно трижды заменить число на сумму его цифр.