30-й Международный математический Турнир городов
2008/09 учебный год, весна
Решения задач от Л.Медникова и А.Шаповалова

Базовый вариант, младшие классы

5.1. [3] В выпуклом 2009-угольнике проведены все диагонали. Прямая пересекает 2009-угольник, но не проходит через его вершины. Докажите, что прямая пересекает четное число диагоналей. (*Г.Гальперин*)

Пусть по одну сторону от прямой находится m, а по другую n – вершин 2009-угольника. Тогда прямая пересекает $mn - 2$ диагонали. Поскольку $m + n$ нечетно, mn четно.

5.2. [4] Пусть a^b обозначает число a^b. В выражении 7^7^7^7^7^7^7 надо расставить скобки, чтобы определить порядок действий (всего будет 5 пар скобок). Можно ли расставить эти скобки двумя разными способами так, чтобы получилось одно и то же число? (*А.Толпыго*)

Можно. (n^7)^(7^7) = $n^{7\cdot7^7}$ = (n^(7^7))^7.

5.3. [4] Володя хочет сделать набор кубиков одного размера и написать на каждой грани каждого кубика по одной цифре так, чтобы можно было из этих кубиков выложить любое 30-значное число. Какого наименьшего количества кубиков ему для этого хватит? (Цифры 6 и 9 при переворачивании не превращаются друг в друга.) (*В.Замятин*)

Нужно не менее 30 единиц, двоек, …, девяток и не менее 29 нулей. Итого, не менее 50 кубиков. На 50 кубиках нетрудно разместить по 30 экземпляров каждой цифры так, чтобы на каждом кубике цифры не повторялись.

5.4. [4] Натуральное число увеличили на 10% и снова получили натуральное число. Могла ли при этом сумма цифр уменьшиться ровно на 10%? (*А.Шаповалов*)

Могла. Примеры: 998888888880, 99999906666660, $\underbrace{8...8}_{45}0$.

Идеология. Сумма цифр исходного N числа кратна 90; если она равна $90n$, то при сложении N и $0,1N$ должно быть $11n$ переносов в следующий разряд.

5.5. [5] В ромбе $ABCD$ $\angle A$ =120°. На сторонах BC и CD взяты точки M и N так, что $\angle NAM = 30°$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника NAM, лежит на диагонали ромба. (*Р.Женодаров*)

Пусть O – центр указанной описанной окружности. При повороте на 60° вокруг точки M луч CD переходит в часть луча CA (M лежит на биссектрисе внешнего угла тр-ка и, значит, равноудалена от прямых CD и CA), а лежащая на нем точка N – в точку O (тр-к MON правильный) $\Rightarrow$ O лежит на луче CA. Она не может лежать за точкой A, поскольку оттуда отрезок MN виден под углом, меньшим 30° (и,тем более, 60°) $\Rightarrow$ O лежит на диагонали AC.

2-е решение. Рассмотрим точки M_1 и N_1, симметричные M и N относительно AC. MM_1NN_1 – равнобедренная трапеция $\Rightarrow$ она вписана в окружность с центром на диагонали AC. Поскольку $\angle NAM = 30° = \angle NN_1M$, эта окружность проходит через точку A, т.е. является описанной окружностью тр-ка NAM.

Базовый вариант, старшие классы

6.1. [3] См. 5.2.

6.2. [4] На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены отрезками. Известно, что любая прямая, не проходящая через данные точки, пересекает четное число отрезков. Докажите, что из каждой точки выходит четное число отрезков. (*Б.Богданов, Г.Гальперин*)

Можно считать, что все точки $A_1, \ldots, A_k$ находятся на разной высоте: чем больше номер, тем точка выше. Проведем горизонтальные прямые $l_1, \ldots, l_{k-1}$, разделяющие точки: l_i проходит выше A_i, но ниже A_{i+1}. Общее количество точек пересечения прямых l_{i-1} и l_i с нашими отрезками четно. При этом на каждом отрезке, *не выходящем* из A_i, четное число точек пересечения: 0 или 2, а на каждом отрезке, *выходящем* из A_i, – ровно одна. Следовательно, последних отрезков четно.

6.3. [5] Для каждого натурального числа n обозначим через $O(n)$ его наибольший нечетный делитель. Даны произвольные натуральные числа $x_1 = a$ и $x_2 = b$. Построим бесконечную последовательность натуральных чисел по правилу: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$, где $n = 3, 4, \ldots$.

а) [2] Докажите, что, начиная с некоторого места, все числа в последовательности будут равны одному и тому же числу.

б) [2] Как найти это число, зная числа a и b? (*Г.Гальперин*)

а) x_n нечетно при $n > 2$ $\Rightarrow$ $x_{n+2} \le {}^1/_2\,(x_{n+1} + x_n)$ $\Rightarrow$ по-сть $y_n = \max\{x_{n+1}, x_n\}$ не возрастает. Поскольку бесконечное убывание невозможно, эта по-сть стабилизируется: $y_m = y_{m+1} = y_{m+2} = \ldots$ Если $x_m \ne x_{m+1} \ne x_{m+2}$, то $x_{m+2} < y_m$, $x_{m+3} < y_{m+1} = y_m$ $\Rightarrow$ $y_{m+2} < y_m$ – противоречие. Значит, $x_{m+1} = x_{m+2} = x_{m+3} = \ldots$

б) $\delta = O(\text{НОД}(a, b))$. Пусть $x_m = x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots$ Ясно, что все x_n (в частности, x_m) кратны δ. С другой стороны, $x_{m-1} = 2^k x_{m+1} - x_m$ кратно x_m $\Rightarrow$ x_{m-2} кратно x_m $\Rightarrow$ $\ldots \Rightarrow$ a и b кратны x_m $\Rightarrow$ δ кратно x_m $\Rightarrow$ $\delta = x_m$.

6.4. [4] В ряд выписаны несколько нулей и единиц. Рассмотрим пары цифр в этом ряду (не только соседних), где левая цифра равна 1, а правая 0. Пусть среди этих пар ровно M таких, что между единицей и нулем этой пары стоит четное число цифр, и ровно N – таких, что между единицей и нулем этой пары стоит нечетное число цифр. Докажите, что $M \ge N$. (*В.Ясинский*)

Если в ряду есть две единицы подряд, вычеркнем их. При этом M и N не изменятся: число четных пар с одной единицей равно числу нечетных пар с другой; а четности пар, куда эти единицы не входят, это не повлияет. Также можно стереть и два нуля, стоящих подряд. Продолжая эти стирания, мы придем к ряду (возможно, пустому), где нули и единицы чередуются. Но у такого ряда $N = 0$.

6.5. [4] Внутри некоторого тетраэдра взяли произвольную точку X. Через каждую вершину тетраэдра провели прямую, параллельную отрезку, соединяющему X с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что четыре полученные прямые пересекаются в одной точке. (*С.Маркелов*)

Пусть O – центр масс тетраэдра, T – точка пересечения медиан грани ABC. При гомотетии с центром O и коэффициентом –3, T перейдет в D, а X – в некую точку Y. Поэтому $DY \| TO$ – одна из указанных прямых (прямая TO совпадает с DT). Аналогично три остальные прямые проходят через точку Y.

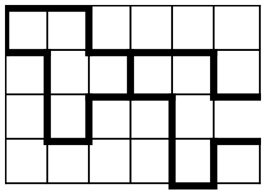
Сложный вариант, младшие классы

7.1. [3] Вася и Петя играют в следующую игру. На доске написаны два числа: $^1/_{2009}$ и $^1/_{2008}$. На каждом ходу Вася называет любое число x, а Петя увеличивает одно из чисел на доске (какое захочет) на x. Вася выигрывает, если в какой-то момент одно из чисел на доске станет равным 1. Сможет ли Вася выиграть, как бы ни действовал Петя? (*Д.Баранов*)

Да. Ему достаточно на каждом шаге называть $^1/_{2008\cdot 2009}$.

7.2. **а**) [2] Докажите, что найдется многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую – в отношении 1:2.

б) [3] Найдется ли выпуклый многоугольник с таким свойством? (*С.Маркелов*)



а) Например, см. рис.:

б) Да. Проведем через центр квадрата два перпендикулярных отрезка, делящих его стороны в отношении 1:2. Они разделят квадрат на 4 равных 4-угольника. Оставив два соседних, получим прямоугольную трапецию, разделенную согласно условию.

7.3. [5] В каждой клетке квадрата 101×101, кроме центральной, стоит один из двух знаков: “поворот” или “прямо”. Шахматная фигура “машина” может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машина попадает в клетку со знаком “прямо”, то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком “поворот”, то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли так расставить знаки, чтобы машина не могла попасть в дом? (*А.Чеботарев*)

Нельзя. Пусть знаки как-то расставлены. “Выпустим” машину из дома. Пусть она движется согласно “правилам дорожного движения”, поворачивая попеременно то впра-во, то влево. Тогда она не может “зациклиться” и когда-то выйдет за пределы квадрата 101×101. Проделав тот же путь в обратном порядке. она попадет в дом.

7.4. [5] Дана бесконечная последовательность различных натуральных чисел. Известно, что каждый член этой последовательности (кроме первого) – либо среднее арифметическое, либо среднее геометрическое двух соседних с ним членов. Обязательно ли все члены этой последовательности, начиная с некоторого, – только средние арифметические либо только средние геометрические своих соседей? (*А.Перепечко*)

Нет. Рассмотрим последовательность, где $a_{2n-1} = n(n + 1)$, $a_{2n} = (n + 1)^2$: 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25… Каждый четный член – среднее арифметическое, а каждый нечетный – среднее геометрическое своих соседей.

7.5. [6] Замок обнесен круговой стеной с 9 башнями, на которых дежурят рыцари. По истечении каждого часа все они переходят на соседние башни, причем каждый рыцарь движется либо все время по часовой стрелке, либо против. За ночь каждый рыцарь успевает подежурить на каждой башне. Известно, что был час, когда на каждой башне дежурили хотя бы два рыцаря, и был час, когда ровно на 5 башнях дежурили ровно по одному рыцарю. Докажите, что был час, когда на одной из башен вообще не было рыцарей. (*М.Мурашкин*)

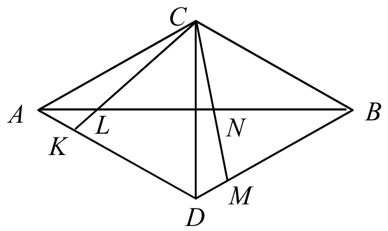
Представим себе, что рыцари стоят на 18 площадках, расположенных на двух круговых платформах, которые каждый час поворачиваюся в противоположных направлениях на

40°. По условию в некоторый момент на 5 площадках никого не было, а на оказавшихся рядом (в тех же башнях) площадках – по одному рыцарю. Разберем два случая.

1) Пустые площадки есть на обеих платформах. Тогда в некоторый момент они окажутся рядом, т.е. на соотвествующей башне рыцарей не будет.

2) Все пустые площадки находятся на одной платформе, а все одинокие рыцари – на другой. Поскольку башен всего 9. в каждый момент найдется башня, где окажутся и пустая площадка и одинокий рыцарь. Но это противоречит условию.

7.6. [7] Угол C при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины C выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AB (по закону "угол падения равен углу отражения"), попали на боковые стороны. В результате исходный треугольник разделился на 5 меньших треугольников. Рассмотрим те три из них, которые примыкают к стороне AB. Докажите, что площадь среднего треугольника равна сумме площадей крайних. (*В.Произволов*)



Отразим картинку относительно основания AB. Нам достаточно доказать, что $S_{CLN} = S_{AKL} + S_{BMN}$.
Добавив к обеим частям S_{KLNM}, сведем задачу к доказательству равенства $S_{ABD} = S_{CKDM}$. Заметим. что треугольники ACK и DCM равны (один получается из другого поворотом на 60° вокруг точки C). Поэтому

$$S_{CKDM} = S_{CKD} + S_{CDM} = S_{CKD} + S_{ACK} = S_{ACD} = S_{ABD}.$$

7.7. [9] Пусть C_n^k обозначает количество способов выбрать k предметов из n различных предметов (способы, отличающиеся только порядком выбора предметов, считаются одинаковыми). Докажите, что если натуральные числа k и l меньше n, то числа C_n^k и C_n^l имеют общий множитель, больший 1. (*Фольклор, Эрдёш и Секереш*)

Пусть $k < l$. Выбрать l предметов можно так: сначала выберем предметов, а потом недостающие $l - k$ из $n - k$ оставшихся. Итого $C_n^k \cdot C_{n-k}^{l-k}$ способов. При таком подсчете каждый набор из l предметов считается C_l^k раз. Поэтому $C_n^l = \dfrac{C_n^k \cdot C_{n-k}^{l-k}}{C_l^k}$. Поскольку $C_n^k > C_l^k$, в C_n^k найдется множитель d, не сократившийся со знаменателем. На него делится и C_n^l.

Сложный вариант, старшие классы

8.**1**. [4] Прямоугольник разбили на несколько меньших прямоугольников. Могло ли оказаться, что для каждой пары полученных прямоугольников отрезок, соединяющий их центры, пересекает еще какой-нибудь прямоугольник? (*М.Мурашкин*)

Нет. Исходный прямоугольник можно превратить в квадрат сжатием вдоль более длинной стороны. *Длиной* прямоугольника назовем длину большей стороны. Рассмотрим самый длинный прямоугольник P разбиения. Можно считать, что он расположен горизонтально и не примыкает к верхней стороне квадрата. Тогда центр прямоугольника P_1, содержащего середину верхней стороны P, расположен над P, следовательно отрезок, соединяющий центры P и P_1, не пересекает других прямоугольников.

8.**2**. [4] См. 7.4.

8.**3**. [6] На каждой клетке доски 10×10 стоит фишка. Разрешается выбрать диагональ, на которой стоит четное число фишек, и снять с нее любую фишку. Какое наибольшее число фишек можно убрать с доски такими операциями? (*М.Мурашкин*)

1		2		5		10		17	
	3		6		11		18		
4		7		12		19		26	
	8		13		20		27		
9		14		21		28		34	
	15		22		29		35		
16		23		30		36		40	
	24		31		37		41		
25		32		38		42		44	
	33		39		43		45		

90. Назовем (*не*)*четной* диагональ, на которой (в данный момент) стоит (*не*)*четное* число фишек. После снятия фишки четная диагональ становится нечетной, а нечетная – четной. Поэтому число нечетных диагоналей *не уменьшается*. В начале на доске есть 20 нечетных диагоналей, значит, и в конце их не меньше 20. Из них не менее 10 параллельных, и уже на них останется не менее 10 фишек.

Заметим, что фишки с белых и черных полей (в шахматной раскраске) снимаются независимо друг от друга. Поэтому достаточно суметь снять 45 “белых” фишек. На рис. показано, в каком порядке это можно сделать.

Идеология. Надо всегда снимать фишку с пересечения четной и нечетной диагоналей (иначе число нечетных диагоналей увеличится). В приведенном алгоритме мы последовательно разгружаем исходно нечетные диагонали. Когда мы начинаем разгружать одну из верхних диагоналей (например, 10-16) она является нечетной (но с каждой снятой фишкой четность ее меняется) и пересекается поочередно с четной, нечетной, …, нечетной, четной диагоналями. Это и дает возможность снять с нее все фишки по очереди.

Когда же мы начинаем разгружать одну из нижних диагоналей (например, 34-39) она пересекается поочередно с нечетной, четной, …, четной, нечетной диагоналями. Поэтому приходится начинать со 2-й ее клетки.

8.**4**. [6] Три плоскости разрезают параллелепипед на 8 шестигранников, все грани которых – четырехугольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не пересекает две оставшиеся грани). Известно, что вокруг одного из этих шестигранников можно описать сферу. Докажите, что и вокруг каждого из них можно описать сферу. (*В.Произволов*)

Нам потребуются два почти очевидных утверждения.

1. Если четырехугольник вписан, то точка в пространстве, равноудаленная от трех его вершин, равноудалена и от всех четырех.

2. Пусть отрезок, соединяющий точки на боковых сторонах трапеции, делит ее на два четырехугольника. Если один из них вписанный, то и второй вписанный.

(Действительно из условия следует, что соответствующие углы этих четырехугольников равны.)

Решение задачи. Достаточно доказать, что шестигранник, соседний с вписанным, является вписанным.

Пусть $ABCD$ – нижняя грань параллелепипеда, $AEFHKLMN$ и $EBGFLPQM$. – соседние шестигранники (точка E лежит на AB, G – на BC, H – на AD, K лежит над A, L – над E, …), 1-й из которых вписанный. Тогда все его грани – вписанные четырехугольники.

Рассмотрим центр O прямоугольного параллелепипеда $BEVGPXYZ$. Он равноудален от точек B, E, G, P. Четырехугольники $BEFG$ и $BEFP$ вписанные (поскольку $ABGH$ и $ABPK$ – трапеции), значит, к этому набору равноудаленнных от O точек добавляются F и L. Теперь к этому набору можно добавить точку M (четырехугольник $EFML$ вписан) и наконец точку Q (четырехугольник $PQML$ вписан, поскольку $KPQN$ – трапеция). Итак, O равноудалена от всех вершин шестигранника $EBGFLPQM$, т.е. является центром описанной вокруг него сферы.

8.**5**. [8] См. 7.7.

8.**6**. [9] Дано целое число $n > 1$. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый – красным цветом, второй – синим. Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше – тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков – ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл противник? (*А.Шаповалов*)

2-й. Можно считать, что длина окружности равна n и 1-й сначала отметил вершину вписанного правильного n-угольника. 2-й отмечает вершины этого многоугольника, пока это возможно. Назовем дуги, соединяющие соседние вершины n-угольника, *основными*; основную дугу без внутренних отмеченных точек назовем *чистой*, а чистую дугу с красными концами – *опасной*. Пусть к моменту, когда вершины “кончатся”, 1-й отметил k вершин, а второй $n - k$ (значит, у него осталось k ходов). В этот момент опасных дуг не более $k - 1$, поэтому за $k - 1$ ход 2-й успеет их обезопасить. В результате перед последним ходом 2-го все дуги с красными концами короче 1; пусть максимальная длина такой дуги равна $l < 1$. Заметим, что осталась чистая дуга (изначально их было n, а не в вершины был сделан только $n - 1$ ход). У нее есть синий конец, и 2-й может отметить на ней точку, находящуюся от синего конца на расстоянии, большем l.

8.**7**. [9] В ячейку памяти компьютера записали число 6. Далее компьютер делает миллион шагов. На шаге номер n он увеличивает число в ячейке на наибольший общий делитель этого числа и n. Докажите, что на каждом шаге компьютер увеличивает число в ячейке либо на 1, либо на простое число. (*М.Франк*)

Обозначим через число после a_n-го шага. Пусть на каком-то шаге $a_n = 3n$ (например, $a_3 = 9$). Пусть после этого число p, большее 1, впервые прибавилось на m-м шаге.

Тогда до этого прибавлялись единицы, т.е. $a_{m-1} = m + 2n - 1$.

Поэтому $p = \text{НОД}(m, m + 2n - 1) = \text{НОД}(m, 2n - 1)$. Ясно, что p нечетно: $p = 2l - 1$.

Имеем $2n - 1 \equiv 0 \pmod p \;\Rightarrow\; 2n \equiv 1 \equiv 2l \pmod p \;\Rightarrow\; n \equiv l \pmod{2l - 1} \;\Rightarrow$

$m = n + l - 1 = n + \dfrac{p-1}{2}$ (это наименьшее число, большее и кратное d).

Отсюда ясно, что p – наименьший *простой* множитель числа $2n - 1$ (иначе прибавление “не единицы” случилось бы раньше).

При этом $a_m = a_{m-1} + p = m + 2n - 1 + p = m + 2m = 3m$. Значит, и в следующий раз прибавится простое число. И т.д.