30-й Международный математический Турнир городов

Осень, 2008/09 учебный год

Решения задач от А.Шаповалова и Л.Медникова

Базовый вариант, младшие

1.1. [3] В 10 коробках лежат карандаши. Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причем в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.
(П. Кожевников)

Расположим коробки по возрастанию количества карандашей. Заметим, что в n-й коробке лежит не меньше n карандашей (не менее чем n цветов). Из 1-й коробки возьмем любой карандаш. из 2-й – карандаш другого цвета, из 3-й – карандаш 3-го цвета (отличного от 1-х двух) и т.д.

1.2. [3] Даны 50 различных натуральных чисел, 25 из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел. *(В.Произволов)*

2525. Вычтем 50 из каждого числа, которое больше 50. Получатся 50 разных чисел, т.е. числа от 1 до 50. Их сумма равна $1 + 2 + \ldots + 50 = 25\cdot51$, а сумма исходных чисел – $25\cdot51 + 25\cdot50 = 25\cdot101$.

1.3. [4] В окружность радиуса 2 вписан остроугольный треугольник $A_1A_2A_3$. Докажите, что на дугах A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 можно отметить по одной точке (B_1, B_2, B_3 соответственно) так, чтобы площадь шестиугольника $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ численно равнялась периметру треугольника $A_1A_2A_3$. *(Г.Гальперин)*

Проведем радиусы $OB_1 \perp A_1A_2$, $OB_2 \perp A_2A_3$, $OB_3 \perp A_3A_1$. Поскольку диагонали четырехугольника $OA_1B_1A_2$ перпендикулярны, его площадь равна $\frac{1}{2}\, OB_1\cdot A_1A_2 = A_1A_2$. То же верно для четырехугольников $OA_2B_2A_3$ и $OA_3B_3A_1$.

1.4. [4] Даны три натуральных числа, одно из которых равно полусумме двух других. Может ли произведение этих трех чисел являться точной 2008-й степенью натурального числа? (*Г.Гальперин*)

Может. Например 6^{669}, $2\cdot6^{669}$, $3\cdot6^{669}$. Их произведение равно $6\cdot6^{3\cdot669} = 6^{2008}$.

1.5. [4] Несколько спортсменов стартовали одновременно с одного и того же конца прямой беговой дорожки. Их скорости различны, но постоянны. Добежав до конца дорожки, спортсмен мгновенно разворачивается и бежит обратно, затем разворачивается на другом конце, и т.д. В какой-то момент все спортсмены снова оказались в одной точке. Докажите, что такие встречи всех будут продолжаться и впредь. *(А.Шаповалов)*

Пусть длина дорожки равна 0,5 (км). Если один из спортсменов в некоторый момент догнал другого, то разность $s_1 - s_2$ пройденных ими к этому моменту путей – целое число. Если же два спортсмена встретились, то сумма $s_1 + s_2$ – целое число.

По условию в некоторый момент t все числа вида $s_i \pm s_j$ (при некотором выборе знака для каждой пары) целые. Но тогда и во все моменты nt (где n натуральное) соответствующие суммы $n(s_i \pm s_j)$ будут целыми.

Базовый вариант, старшие

2.1. [3] У Алеши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алеша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Сережа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на 1-й поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на 2-й поднос – и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Сережа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алешей равно количеству различных чисел среди записанных Сережей. *(А.Буфетов)*

Пусть Алеша записал k различных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Первое из записанных Сережей чисел равно числу N_1 коробок. Оно будет записано ровно n_1 раз. После этого часть коробок опустеет, и следующее по величине число N_2, записанное Сережей, равно количеству коробок, где изначально было более n_1 пирожных. И т.д. Последнее по величине из записанных Сережей чисел (N_k) равно количеству коробок, где изначально было n_k пирожных.

2.2. [3] Решите систему уравнений ($n > 2$)

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \ldots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \ldots + x_n + x_1} = \ldots = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + \ldots + x_{n-1}},$$

$x_1 - x_2 = 1$. (*Б.Френкин*)

(1, 0, …, 0). Пусть $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$. Возводя равенство $\sqrt{x_i} + \sqrt{S - x_i} = \sqrt{x_j} + \sqrt{S - x_j}$ в квадрат и приводя подобные, получим

$$x_i(S - x_i) = x_j(S - x_j) \quad \Leftrightarrow \quad (x_i - x_j)(x_i + x_j - S) = 0.$$

Таким образом, для каждой пары неизвестных либо $x_i = x_j$, либо $x_i + x_j = S$.

$x_1 \neq x_2$, поэтому $x_1 + x_2 = S$. Поскольку все неизвестные неотрицательны,

$$x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0.$$

$x_2 + x_3 = x_2 < S$, следовательно $x_2 = x_3 = 0$.

2.3. [4] В окружность радиуса 2 вписан 30-угольник $A_1A_2\ldots A_{30}$. Докажите, что на дугах A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{30}A_1$ можно отметить по одной точке (B_1, B_2, …, B_3 соответственно) так, чтобы площадь 60-угольника $A_1B_1A_2B_2\ldots A_{30}B_{30}$ численно равнялась периметру 30-угольника $A_1A_2\ldots A_{30}$. (*Г.Гальперин*)

См. 1.3.

Замечание. Один из 4-угольников $OA_iB_iA_{i+1}$ может оказаться невыпуклым (если центр окружности лежит снаружи исходного 30-угольника), но его площадь все равно вычисляется так же.

2.4. [4] Существует ли арифметическая прогрессия из пяти натуральных чисел, произведение которых есть точная 2008-я степень натурального числа? (*Г.Гальперин*)

Существует. Например 120^{803}, $2\cdot120^{803}$, $3\cdot120^{803}$, $4\cdot120^{803}$, $5\cdot120^{803}$. Их произведение равно $120\cdot120^{5\cdot803} = 120^{4016} = (120^2)^{2008}$.

2.5. [4] На клетчатом листе бумаги нарисованы несколько прямоугольников, их стороны идут по сторонам клеток. Каждый прямоугольник состоит из нечетного числа клеток, и никакие два прямоугольника не содержат общих клеток. Докажите, что эти прямоугольники можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы у прямоугольников одного цвета не было общих точек границы. (*А.Грибалко*)

Номер краски соответствует набору четностей координат левого нижнего угла прямоугольника. Если два прямоугольника соприкасаются вертикальными сторонами, то абсцисса *левой* стороны правого многоугольника равна абсциссе *правой* стороны левого многоугольника и отличается от абсциссы его *левых* углов.

Сложный вариант, младшие

3.1. [4] На шахматной доске 100×100 расставлено 100 не бьющих друг друга ферзей. Докажите, что в каждом угловом квадрате 50×50 находится хотя бы один ферзь. *(А.Грибалко)*

Пусть в левом верхнем квадрате 50×50 ферзей нет. Тогда все 50 ферзей на 50 верхних горизонталях находятся в правом верхнем квадрате 50×50, а все 50 ферзей на 50 левых вертикалях – в левом нижнем квадрате. Но оба этих квадрата покрываются 99 диагоналями, поэтому ферзей там не больше 99. Противоречие.

3.2. [6] Есть 4 камня, каждый весит целое число граммов. Есть чашечные весы со стрелкой, показывающей, на какой из двух чаш масса больше и на сколько граммов. Можно ли узнать про все камни, сколько какой весит, за 4 взвешивания, если в одном из этих взвешиваний весы могут ошибиться на 1 грамм? *(Д.Баранов)*

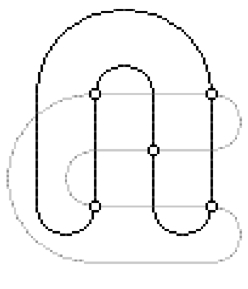
4 взвешивания позволяют найти значения выражений $\begin{cases} -a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s_1, \\ a_1 - a_2 + a_3 + a_4 = s_2, \\ a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = s_3, \\ a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = s_4. \end{cases}$ (одно, возможно, с ошибкой). Все эти числа одной четности, поэтому место ошибки находится однозначно. В какую сторону исправить ошибку, мы узнаем из соображения, что число $s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = {}^1/_2(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$ должно быть той же четности, что и все числа s_i.

3.3. [6] Сережа нарисовал треугольник *ABC* и провел в нем медиану *AD*. Затем он сообщил Илье, какова в этом треугольнике длина медианы *AD* и какова длина стороны *AC*. Илья, исходя из этих данных, доказал утверждение: угол *CAB* тупой, а угол *DAB* острый. Найдите отношение *AD*/*AC* (и докажите для любого треугольника с таким отношением утверждение Ильи).*(И.Богданов)*

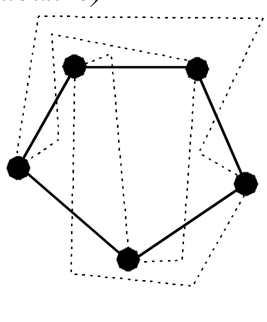
1:2. Пусть *E* – середина *AC*. Тр-к *DAE* равнобедренный $\Rightarrow$ углы *ADE* и *AED* при его основании острые. Осталось заметить, что $\angle DAB = ADE$, $\angle A = 180° - \angle AED$.

Если $AC:AD > 2$, то угол *DAB* может быть прямым, если $AC:AD < 2$, то угол *A* может быть прямым.

3.4. [7] Барон Мюнхгаузен рассказывал, что у него есть карта страны Оз с пятью городами. Каждые два города соединены дорогой, не проходящей через другие города. Каждая дорога пересекает на карте не более одной другой дороги (и не более одного раза). Дороги обозначены желтым или красным (по цвету кирпича, которым вымощены), и при обходе вокруг каждого города (по периметру) цвета выходящих из него дорог чередуются. Могут ли слова барона быть правдой? *(А.Грибалко)*



Могут. См.:



3.5. [8] Даны положительные числа a_1, a_2, …, a_n. Известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le \frac{1}{2}$. Докажите, что $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) < 2$. *(С.Слободник)*

По индукции нетрудно доказать неравенство:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \le 1 + 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Замечание для знатоков. Можно д/ч при фиксированной сумме $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ выражение $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)$ максимально при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Следовательно,

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \le \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \le \sqrt{e}\ .$$

3.6. [9] На сторонах AC и BC неравнобедренного тр-ка ABC во внешнюю сторону построены как на основаниях равнобедренные тр-ки AB_1C и CA_1B с одинаковыми углами при основаниях, равными φ. Перпендикуляр, проведенный из вершины C к отрезку A_1B_1, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AB в точке C_1. Найдите угол AC_1B. *(А.Заславский)*

2φ. Проведем гомотетию с центром C и коэффициентом 2. Отрезок A_1B_1 перейдет в отрезок A_2B_2. Пусть P – точка пересечения A_2B_2 с CC_1. Точки A и P (B и P) лежат на окружности с диаметром CB_2 (CA_2) $\Rightarrow$ $\angle APB_2 = \angle ACB_2 = \angle BCA_2 = \angle BPA_2$ $(= 90° + \varphi)$ $\Rightarrow$ CC_1 – биссектриса угла APB $\Rightarrow$ середина дуги AB описанной окружности тр-ка APB.

Второе решение. Пусть A_3, B_3, C_3 – середины сторон BC, AC, AB. Повернем 4-угольник $B_1B_3A_3A_1$ на 90° вокруг точки B_3 и применим к нему гомотетию с центром B_3 и коэффициентом $\operatorname{ctg}\varphi$. Получится 4-угольник $CB_3A_4C_4$. $CC_4 \perp B_1A_1$ $\Rightarrow$ прямые CC_4 и CC_1 совпадают. С другой стороны, $A_4C_4 \parallel CA_3 \parallel B_3C_3$ и $A_4C_4 = CA_3 = B_3C_3$ $\Rightarrow$ $B_3A_4C_4C_3$ – пар-мм $\Rightarrow$ $C_3C_4 \parallel B_3A_4 \perp B_1A_1$ $\Rightarrow$ прямые C_3C_4 и C_3C_1 совпадают $\Rightarrow$ C_4 совпадает с C_1 $\Rightarrow$ $C_3C_4{:}AC_3 = A_4B_3{:}B_3A_3 = \operatorname{ctg}\varphi$ $\Rightarrow$ $\angle AC_4C_3 = \varphi$.

3.7. В бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, … число a_1 равно 1, а каждое следующее число строится из предыдущего по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Д/ч в этой последовательности

а) [5] число 1 встречается бесконечно много раз;

б) [5] каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.

(А.Заславский)

(Вот первые члены этой последовательности: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, …)

а) Пусть $a_n = a_{n-1} + \varepsilon_n$. Тогда $a_n = 1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$. Заметим, что $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n$. Отсюда

$a_{4n} = 1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{4n} = 1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \ldots + \varepsilon_{4n} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + (\varepsilon_5 + \varepsilon_7) + \ldots + (\varepsilon_{4n-3} + \varepsilon_{4n-1}) =$
$= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{2n} = a_{2n}$ (выражения в скобках равны нулю).

Поэтому $a_{2^n} = a_2 = 2$ $\Rightarrow$ $a_{2^n-1} = 1$.

б) Согласно а) $a_{16n+4} = a_{8n+2} = a_{8n+1} + 1 = a_{8n} + 2 = a_{4n} + 2$. Это значит, что члены с индексами, кратными 4, могут быть сколь угодно большими.

Теперь утверждение задачи следует из п. а) и дискретной непрерывности.

2-е решение. Нетрудно доказать по индукции, что a_n равно количеству групп нулей и единиц в двоичной записи числа n. (Например, если $n_2 = 1110011001$ – 3 группы единиц и 2 группы нулей, то $a_n = 5$).

Сложный вариант, старшие

4.1. [4] Квадратная доска разделена семью прямыми, параллельными одной стороне доски, и семью прямыми, параллельными другой стороне доски, на 64 прямоугольные клетки, которые покрашены в белый и черный цвета в шахматном порядке. Расстояния между соседними прямыми не обязательно одинаковы, поэтому клетки могут быть разных размеров. Известно, однако, что отношение площади любой белой клетки к площади любой черной клетки не больше 2. Найдите наибольшее возможное отношение суммарной площади белых клеток к суммарной площади черных. *(Ю.Чеканов)*.

$^5/_4$. Пусть левый верхняя клетка белая. Все нечетные столбцы сдвинем влево, а потом все нечетные строчки вверх. Теперь все белые клетки собрались в двух прямоугольниках в левом верхнем и правом нижнем углах, причем площадь отношение площади каждого белого прямоугольника к площади каждого черного не больше 2. Пусть ширина левого черного прямоугольника больше $^1/_2$. Тогда увеличивая его высоту, мы увеличиваем суммарную черную площадь. Значит, максимальное отношение черной площади к белой достигается, когда верхний прямоугольник – квадрат со стороной $^2/_3$.

Пример разрезания очевиден.

4.2. [6] Пространство разбито на одинаковые кубики. Верно ли, что для каждого из этих кубиков обязательно найдется другой, имеющий с ним общую грань? *(И.Богданов)*

Рассмотрим стандартное разбиение пространства на кубики. Зафиксируем один из них (K). Окрасим в красный вертикальные столбцы, примыкающие к к слева и справа; в синий – горизонтальные столбцы, примыкающие к K спереди и сзади, и в зеленый – горизонтальные столбцы, примыкающие к K сверху и снизу (не пересекающиеся с красными. Сдвинем все цветные столбцы на полкубика вдоль их образующих.

4.3. [6] На столе лежат $N > 2$ кучек по одному ореху в каждой. Двое ходят по очереди. За ход нужно выбрать две кучки, где числа орехов взаимно просты, и объединить эти кучки в одну. Выиграет тот, кто сделает последний ход. Для каждого N выясните, кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл его противник *(А.Шаповалов)*.

2-й. Назовем *плохими* позиции вида ($2n$+1, 1, …, 1) (единиц больше одной). Исходная позиция плохая. 1-й из плохой позиции может перейти либо в ($2n$+2, 1, …, 1), либо в ($2n$+1, 2, 1, …, 1); в обоих случаях 2-й может снова “загнать” 1-го в плохую позицию ($2n$+3, 1, …, 1). В случае нечетного N 2-й придерживается такой стратегии до конца, а в случае четного – до позиции (N–3, 1, 1, 1), после чего на любой ход 1-го (в (N–2, 1, 1) или в (N–3, 2, 1)) отвечает ходом в (N–2, 2).

4.4. [6] Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Точка A_1 – это точка пересечения описанной окружности треугольника BCD с прямой AC, отличная от C. Аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ – тоже трапеция. *(И.Богданов)*

Отношения отрезков, соединяющих точку пересечения диагоналей с вершинами.

4.5. [8] См. 3.7 б).

4.6. [9] Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами таков, что уравнение $P(m) + P(n) = 0$ имеет бесконечно много решений в целых числах m и n. Докажите, что у графика $y = P(x)$ есть центр симметрии. *(А.Шаповалов)*

1) При большом по модулю a все коэффициенты многочлен $P(x + a) + P(a - x)$ при нечетных степенях равны нулю, а при четных – одного знака (достаточно сосчитать производные в нуле), следовательно корней он не имеет. Поэтому сумма $m + n$ ограничена по модулю.

2) Тогда одно из значений ($2a$) встречается бесконечно много раз.

3) Многочлен $P(x + a) + P(a - x)$ имеет бесконечно много корней, т.е. равен 0.

4.7. Тест состоит из 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя действовать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем

а) [5] после 29-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 30-й попытке);

б) [5] после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)?

(Изначально Витя не знает ни одного ответа, тест всегда один и тот же.) *(В.Клепцын)*

Решение.

а) Пусть в k-й попытке (1, 2, …, 29) Витя отвечает ДА на k-й вопрос и НЕТ на все остальные. Любые две попытки отличаются ровно в двух местах, поэтому результаты либо совпадают, либо отличаются на 2. Если результат k-й попытки отличается от результата 1-й, то мы сразу узнаем ответы на 1-й и k-й вопросы. Зная ответ на 1-й вопрос. мы узнаем ответы и на все остальные.

Если результаты всех попыток совпадают, то ответы на 1-е 29 вопросов одинаковы. Тогда по результату 1-й попытки узнается как этот общий ответ, так и ответ на 30-й вопрос.

б) При 1-й попытке ответим НЕТ на все вопросы. Разобьем вопросы на 6 групп по 5 вопросов. Покажем как за 4 попытки узнать ответы на все вопросы такой группы.

В этих 4-х попытках ДА только на часть вопросов из данной группы:

а – на все вопросы (здесь мы узнаем сколько ответов ДА в нашей группе);

б – на 3-й, 4-й, 5-й;

в – на 2-й, 4-й, 5-й;

г – на 2-й, 3-й и 5-й.

Нетрудно проверить. что последние 3 попытки действительно дают полную информацию об ответах на все 5 вопросов.

Осталось заметить, что вопрос а) в последней группе задавать не нужно, так как мы и без него знаем число ответов ДА (во всем тесте и в остальных группах, а значит, и в последней).