29-й Международный математический Турнир городов

2007/08 учебный год

Решения задач (от Медникова и Шаповалова)

Осенний тур

Тренировочный вариант, младшие классы

1.1. [3] Какое наибольшее число белых и черных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на любой горизонтали и на любой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем черных? (*А.Шаповалов*)

Ответ. 48 фишек.

Решение. Число фишек на каждой вертикали кратно 3, значит, их не больше 6, а на всей доске – не более 48. Пример расстановки 48 фишек: 32 белые фишки ставим на белые поля, а 16 черных – вдоль главной «черной» диагонали и вдоль двух параллельных диагоналей «длины» 4.

1.2. [4] На бумажке записаны 1 и некоторое нецелое число x. За один ход разрешается записать на бумажку сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Можно ли за несколько ходов получить на бумажке число x^2? (*Г.Гальперин*)

Решение. Можно. Например, так (числа записаны в порядке их появления):

$$\frac{1}{x},\ x+1,\ \frac{1}{x+1},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x},\ x^2+x,\ \left(x^2+x\right)-x=x^2$$

1.3. [4] Середина одной из сторон треугольника и основания высот, опущенных на две другие стороны, образуют равносторонний треугольник. Верно ли, что исходный треугольник тоже равносторонний? (*А.Заславский*)

Ответ: неверно.

Первое решение. Рассмотрим произвольный остроугольный треугольника ABC, где $\angle B = 60°$. Пусть AH и CK – высоты, M – середина AC. В прямоугольных треугольниках AHC и AKC медианы HM и KM равны половине гипотенузы, поэтому треугольники *AMH и CMK равносторонние*. Их внешние углы $\angle AMH = 2\angle C$, $\angle CMK = 2\angle A$, откуда

$$\angle HMK = \angle AMH + \angle CMK - 180° = 2(\angle A + \angle C) - 180° = 2(180° - \angle B) - 180° = 60°.$$

Второе решение. На полуокружности с диаметром AC и центром M отметим точки K и H так, чтобы дуга KH составляла 60°. Пусть прямые AK и CH пересекаются в точке B. Тогда K и H – основания высот треугольника ABC, треугольник KMH равносторонний, а треугольник ABC – нет (если прямая KH не параллельна AC или точка B лежит внутри полуокружности).

1.4. [5] В таблицу 29×29 вписали числа 1, 2, 3, ..., 29, каждое по 29 раз. Оказалось, что сумма чисел над главной диагональю в три раза больше суммы чисел под этой диагональю. Найдите число, вписанное в центральную клетку таблицы. (*А.Шаповалов*)

Ответ. 15.

Решение. Над (под) диагональю находится $29\cdot 14 = 406$ чисел. Нетрудно проверить, что сумма 406 наибольших чисел таблицы (15, 16, …, 29, взятые по 29 раз) ровно в три раза больше суммы 406 наименьших чисел (1, 2, …, 14, взятые по 29 раз). Поэтому все числа на диагонали равны 15.

1.5. [5] Фокусник с завязанными глазами выдает зрителю карточек с номерами от 1 до 5. Зритель прячет две карточки, а три отдает ассистенту фокусника. Ассистент указывает зрителю на две из них, и зритель называет номера этих карточек фокуснику (в том порядке, в каком захочет). После этого фокусник угадывает номера карточек, спрятанных у зрителя. Как фокуснику и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался? (*А.Толпыго*)

Решение. Занумеруем вершины правильного пятиугольника числами от 1 до 5. *Отрезками* назовем его стороны и диагонали. Пара карточек, спрятанных зрителем, соответствует одному из отрезков. Среди трех карточек у ассистента есть пара, соответствующая параллельному отрезку. Ее он и называет фокуснику.

Тренировочный вариант, старшие классы

2.1. [3] Есть сто картинок, на каждой изображены взрослый и ребенок ростом поменьше (все двести человек на картинках разные). Из них надо собрать одну большую картину. Разрешается перед этим изменить масштаб каждой картинки, уменьшив ее размеры в целое число раз (масштабы разных картинок можно менять независимо друг от друга). Докажите, что можно добиться, чтобы на большой картине все взрослые были выше всех детей. (*А.Шаповалов*)

Замечание. Формулировка вызвала много неоднозначных толкований. Видимо, стоило бы (и стоит впредь) формулировать так:

2.1. [3] На экране компьютера стоят в ряд 200 человек. На самом деле эта картинка составлена из 100 фрагментов, на каждом – пара: взрослый и ребенок пониже ростом. Разрешается в каждом из фрагментов изменить масштаб, уменьшив при этом одновременно рост взрослого и ребенка в одинаковое целое число раз (масштабы разных фрагментов можно менять независимо друг от друга). Докажите, что можно добиться, чтобы на общей картинке все взрослые были выше всех детей. [3 балла]

Решение. Для каждого фрагмента зафиксируем рациональное число, большее роста ребенка, но меньшее роста взрослого. Представим эти числа в виде обыкновенных дробей и приведем их все к общему знаменателю. Теперь уменьшим размеры каждой фрагмента в число раз, равное числителю соответствующей ей дроби.

2.2. На бумажке записаны три положительных числа x, y и 1. За один ход разрешается записать на бумажку сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Можно ли за несколько ходов получить на бумажке

а) [2] число x^2? **б**) [2] число xy?

(*Г.Гальперин*)

Решения. **а**) См. 1.2.

б) Разделим одно из чисел на 2: $\frac{1}{y}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y}, \frac{y}{2}$. Далее, умея возводить в квадрат, за несколько шагов получим число $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 - x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = xy$.

2.3. [4] Дана прямая и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой на равном расстоянии от нее. Как с помощью циркуля и линейки найти на прямой такую точку S, что произведение $AS\cdot BS$ будет наименьшим? (*А.Толпыго*)

Решение. Площадь треугольника ASB не зависит от S: основание АВ и опущенная на него высота постоянны. С другой стороны, эта площадь равна $^1/_2\ AS\cdot BS\cdot\sin\ \angle ASB$. Поэтому наименьшему произведению $AS\cdot BS$ соответствует наибольший синус угла ASB.

Построим окружность с диаметром AB. Если она пересекает нашу прямую l в двух точках P и Q, то эти точки – искомые ($\sin\angle APB = \sin\angle AQB = 1$). В противном случае искомая точка S – пересечение l с серединным перпендикуляром к отрезку AB (из этой точки отрезок AB виден под наибольшим нетупым углом, поскольку остальные точки прямой лежат вне проходящей через точки A, B и S окружности).

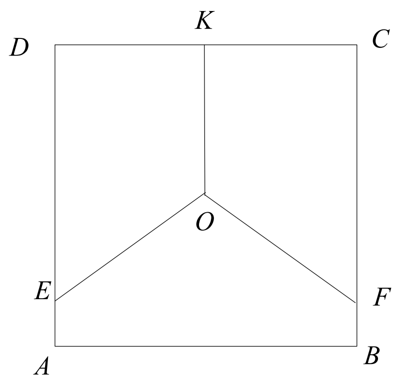
2.4. [4] См. 1.5.

2.5. Квадрат со стороной 1 см разрезан на три выпуклых многоугольника. Может ли случиться, что диаметр каждого из них не превосходит

а) [1] 1 см; **б**) [2] 1,01 см; **в**) [2] 1,001 см?

(*А.Толпыго*)

а) Нет. В один многоугольник попадут две вершины квадрата, скажем А и В. Остальные точки отрезка AD удалены от B на расстояние больше 1, поэтому они находятся вне этого многоугольника, следовательно, A лежит на границе двух многоугольников (первого и второго). Аналогично B лежит на границе первого и третьего многоугольников (B не может принадлежать второму). Но тогда середина K стороны CD не может принадлежать ни одному из многоугольников. Противоречие.



б) Да. См. рис.: O – центр квадрата $ABCD$, K – середина стороны CD, $AE = BF = 0{,}14$.

$AF = \sqrt{1+0{,}14^2} < \sqrt{1{,}01} < 1{,}01$, $EK = \sqrt{0{,}5^2+0{,}86^2} < 1$.

в) Нет. Предположим нам удалось разрезать квадрат на три многоугольника M_1, M_2, M_3 нужных диаметров. Пусть вершины A и B принадлежат M_1. Отложим на стороне AD отрезок $AG = 0{,}05$, а на стороне BC – отрезок $BH = 0{,}1$. Точки G и H не могут принадлежать M_1, поскольку $AH > BG = \sqrt{1+0{,}05^2} > \sqrt{1{,}01} > 1{,}001$. Пусть G принадлежит многоугольнику M_2. Тогда H принадлежит M_3 ($HG = BG > 1{,}001$). Тогда середина K стороны CD не может принадлежать ни одному из многоугольников:

$AK > GK > HK = \sqrt{0{,}9^2+0{,}5^2} = \sqrt{1{,}06} > 1{,}001$. Противоречие.

Основной вариант, младшие классы

3.1. [5] На стороне CD ромба $ABCD$ нашлась такая точка K, что $AD = BK$. Пусть F – точка пересечения диагонали BD и серединного перпендикуляра к стороне BC. Докажите, что точки A, F и K лежат на одной прямой. (*Р.Женодаров*)

$ABKD$ – равнобедренная трапеция. Точка G пересечения ее диагоналей лежит на серединном перпендикуляре к основанию AB. В силу симметрии ромба $ABCD$ относительно диагонали BD, G лежит также на серединном перпендикуляре к BC, то есть совпадает с точкой F.

3.2. **а**) [3] Петя и Вася задумали по три натуральных числа. Петя для каждых двух своих чисел написал на доске их наибольший общий делитель. Вася для каждых двух из своих чисел написал на доске их наименьшее общее кратное. Оказалось, что Петя написал на доске те же числа, что и Вася (возможно в другом порядке). Докажите, что все написанные на доске числа равны. (*Б.Френкин, И.Богданов*)

б) [3] Останется ли верным утверждение предыдущей задачи, если Петя и Вася изначально задумали по четыре натуральных числа?

а) **Первое решение**. Выберем какой-нибудь простой делитель p задуманных Васей чисел. Пусть он входит в разложение этих чисел на простые множители в степенях a, b и c, где $a \le b \le c$. Тогда в разложение выписанных Васей НОК p будет входить в степенях b, c и c, то есть две *наибольшие* степени совпадают. Легко видеть, что среди выписанных Петей НОД совпадают две *наименьшие* степени p. Значит, совпадают *все* степени p в выписанных числах. Поскольку это верно для любого простого делителя, то сопадают все разложения на простые множители, а, значит, и все выписанные числа.

Второе решение. Пусть Петя и Вася *написали* числа a, b и c. *Попарные* наибольшие общие делители этих чисел равны: это наибольший общий делитель d трех чисел, задуманных Петей. С другой стороны, каждый такой попарный делитель делится на одно из чисел, задуманных Васей. Значит, d делится и на наименьшее общее кратное задуманных Васей чисел, которое равно НОК(a, b, c). Следовательно, НОК(a, b, c) = НОД(a, b, c), то есть $a = b = c$.

Замечание. Задуманные числа совпадать не обязаны, например у Васи задуманы 2, 3 и 6, а у Пети – 6, 12 и 18.

б) Нет, не останется. Например, если Петя задумал числа 6, 10, 15, 30, а Вася – числа 1, 2, 3, 5, то оба выпишут наборы 2, 3, 5, 6, 10, 15.

3.3. [6] Миша стоит в центре круглой лужайке радиуса 100 метров. Каждую минуту он делает шаг длиной 1 метр. Перед каждым шагом он объявляет направление, в котором хочет шагнуть. Катя имеет право заставить его сменить направление на противоположное. Может ли Миша действовать так, чтобы в какой-то момент обязательно выйти с лужайки, или Катя всегда сможет ему помешать? (*А.Буфетов*)

Решение. Может.

Начиная со второго шага Миша каждый раз может выбирать направление, перпендикулярное отрезку, соединяющее точку, где он находится, с центром O лужайки. Пусть Миша шагнул из точки A, где $OA = \sqrt{a}$, в точку B. По теореме Пифагора $OB = \sqrt{a+1}$. Действуя так, после n-го шага Миша будет находиться на расстоянии ровно $\sqrt{n}$ м от центра. Сделав 10001 шаг, Миша выйдет за пределы лужайки.

3.4. [7] Дана клетчатая полоса $1\times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй – нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выиграть (как бы ни играл его соперник)? (*Б.Френкин*)

Решение. При $N = 1$ выигрывает первый, в остальных случаях – второй. Его стратегия: первый ход сделать в крайнюю клетку, а дальше ходить как угодно. После k-го хода первого крестики делят полоску не менее чем на k частей, состоящих из пустых клеток и ноликов. Но к этому моменту выставлено лишь k–1 ноликов, значит, в одной из частей нолика нет, и туда можно сходить.

3.5. [8] Дан набор из нескольких гирек, на каждой написана масса. Известно, что набор масс и набор надписей одинаковы, но возможно некоторые надписи перепутаны. Весы представляют из себя горизонтальный отрезок, закрепленный за середину. При взвешивании гирьки прикрепляются в произвольные точки отрезка, после чего весы остаются в равновесии либо отклоняются в ту или иную сторону. Всегда ли удастся за одно взвешивание проверить, все надписи верны или нет? (Весы будут в равновесии, если сумма моментов гирь справа от середины равна сумме моментов гирь слева; иначе отклонятся в сторону, где сумма больше. Моментом гири называется произведение ms массы гири m на расстояние s он нее до середины). (*И.Нетай, В.Шевяков*)

Решение. Отложим самую легкую гирю m. Остальные гири прикрепим слева от середины в разных точках, но чем больше масса, тем дальше от центра. Подсчитаем, в какую точку справа надо повесить гирю m, чтобы было равновесие. Покажем, что если надписи перепутаны, то равновесия нет. Действительно, если переставлены только массы слева, то суммарный момент слева стал меньше по транснеравенству. Если дополнительно поменять местами массу m с массой слева, то момент справа станет больше, а слева еще меньше.

Замечание. Можно обойтись и без транснеравенства. Подвесим гири $m_2, \ldots, m_n$ слева на расстояниях $am_2, \ldots, am_n$ от центра (константа a выбирается так, чтобы точка $a\dfrac{m_2^2 + \ldots + m_n^2}{m}$ подвеса гири m не вышла за пределы отрезка). Пусть $M_2, \ldots, M_n$ – перестановка гирь $m_2, \ldots, m_n$. В силу неравенств $2m_iM_i \le m_i^2 + M_i^2$ новый момент $a(m_2M_2 + \ldots + m_nM_n)$ не превосходит старый $a(m_1^2 + \ldots + m_n^2)$, причем равенство будет только, когда $m_i = M_i$ при всех i.

Замечания для знатоков. **1**. Фактически в предыдущем замечании доказан частный случай неравенства Коши-Буняковского.

2. Вместо транстнеравенства или неравенства Коши-Буняковского можно использовать неравенство Чебышева.

3. Неравенства вообще не нужны. Нам надо показать, что существует решение уравнения $m_1x_1 + \ldots + m_nx_n = 0$ (*), не являющееся решением ни одного из уравнений вида $M_1x_1 + \ldots + M_nx_n = 0$ (*), полученных нетривиальными перестановками коэффициентов. Но пространство решений уравнения (*) (n–1)-мерно, а пространство решений системы (*), (**) (n–2)-мерно. Поскольку (n–1)-мерное пространство нельзя покрыть конечным числом (n–1)-мерных подпространств, искомое решение существует.

3.6. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие – орлом вверх, а какие – решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое целое число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число.

а) [4] Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способ, позволяющий фокуснику гарантированно отгадывать число для $N = k$, то есть способ и для $N = 2k$.

б) [5] Найдите все значения N, для которых у фокусника с ассистентом есть способ. (*С.Грибок*)

Ответ. б) $N = 2^m$.

Решение. а) Мысленно расположив монеты в клетках доски $2\times k$, фокусник пишет под каждым столбцом из двух клеток О, если монеты там лежат одной стороной вверх, и Р – если разными сторонами. Эта комбинация сообщает ему число n от 1 до k. Если в верхней строке четное число решек, он называет n, иначе $n + k$.

Пусть зритель назвал число m. Чтобы сообщить его, ассистент тоже мысленно пишет строку из O и P по тому же правилу. Он может изменить одну из букв, чтобы получить код, соответствующий числу m (при $m \le k$) или $m - k$ (при $m > k$). Для этого ему достаточно перевернуть любую из монет в соответствующем столбце. Выбором верхней или нижней монеты он обеспечивает нужную четность числа решек в верхней строке.

б) При $N = 1$ «способ» очевиден. Из (а) следует, что последовательно удваивая, получим способы для каждого N вида 2^m.

Пусть для какого-то N есть способ угадывания. Для угадывания те комбинации орлов и решек, которые ассистент в принципе может «выдать» фокуснику, должны быть разбиты на N групп: когда фокусник видит комбинацию из i-й группы, он называет число i.

Предположим, что 2^N не делится на N. Так как всего комбинаций 2^N, то в одной из групп (пусть j-й) находится $d < \dfrac{2^N}{N}$ комбинаций. Каждая комбинация j-й группы может быть получена изменением одного знака ровно из N других комбинаций. Но так как $dN < 2^N$, то найдется исходная комбинация, из которой ассистент не может получить ни одну из комбинаций j-й группы. Значит, если зритель построит эту комбинацию, ассистент не сможет сообщить фокуснику, что загадано число j. Противоречие.

Следовательно, 2^N кратно N, то есть N – степень двойки.

3.**7**. [9] Володя решил стать великим писателем. Для этого он каждой букве русского языка сопоставил слово, содержащее эту букву. Потом написал слово, сопоставленное букве “А”. Дальше каждую букву в нем заменил на сопоставленное ей слово (разделяя слова пробелами), потом в получившемся тексте вновь заменил каждую букву на сопоставленное ей слово, и так всего 40 раз. Володин текст начинается так: “Ряд кораблей на дремлющих морях”. Докажите, что этот оборот встречается в Володином тексте еще хотя бы раз. (*А.Буфетов*)

Решение. Обозначим через T_k текст после k шагов. Заметим, что ни в одном тексте до T_{40} первая буква не могла перейти в однобуквенное слово (иначе в дальнейшем первое слово всегда бы оставалось однобуквенным). Значит, каждый раз текст удлинялся хотя бы на одну букву.

Кроме того, в слове T_1 буква А стоит не на первом месте (иначе во всех текстах первое слово начиналось бы на А).

Поскольку в T_1 есть буква А, причем не в начале, то в T_2 входит (также не с начала) полученный из этой буквы А текст T_1. Аналогично, в T_3 входит T_2, полученный из входящего в T_2 текста T_1. Но тогда в T_3 входит и T_1. Продолжая, видим, что в каждом тексте содержатся (не с начала) все предыдущие тексты.

Выпишем первые буквы всех текстов (напомним, что исходная буква А – еще не текст). В русском алфавите 33 буквы, поэтому уже среди первых 34 букв будет повторение. Пусть первое повторение – буква L на k-м месте, где $k \le 34$. Тогда в T_k буква

L стоит на первом месте и еще раз в том входящем в T_k тексте, где L впервые встретилась. От T_k до T_{39} не менее 5 замен, и из первой L в T_{39} получатся минимум 6 первых букв, а в T_{40} – не менее чем 6 первых слов. Значит, в T_{40} из первой L получится текст, начинающийся словами “Ряд кораблей на дремлющих морях”. Но такой же текст получится из второго вхождения L в T_k.

Второе решение. Как показано выше, первая буква любого текста «порождает», как минимум двухбуквенное слово. Поэтому первая буква L текста T_{35} «порождает» минимум 5 первых букв в тексте T_{39}, а в тексте T_{40} – первые 5 слов, то есть весь данный в условии фрагмент. Поскольку буква L на первом месте встречалась и раньше, то некоторый текст T_k ($k < 40$) также начинался со слов РЯД КОРАБЛЕЙ НА ДРЕМЛЮЩИХ МОРЯХ. Первые две буквы РЯ этого текста порождают в тексте T_{40} весь указанный фрагмент (поскольку буква Я содержится только в последнем его слове). Но T_k содержит и еще один фрагмент РЯ (в слове МОРЯХ), который и порождает в T_{40} второе вхождение нашего фрагмента.

Основной вариант, старшие классы

4.1. [2+2] См. **3.2**.

4.2. [6] Диагонали вписанного четырехугольника пересекаются в точке P. Пусть K, L, M, N – середины (по порядку) сторон четырехугольника. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников PKL, PLM, PMN и PNK равны. (*А.Заславский*)

Решение. Пусть K, L, M, N – середины соответственно сторон AB, BC, CD, AD четырехугольника $ABCD$. Треугольники BAP и CDP подобны по двум углам, поэтому подобны и их “половинки” KAP и MDP. Следовательно, $\angle APK = \angle DPM$.

$KL \parallel AC$, $ML \parallel BD$ (как средние линии треугольников ABC и BCD), значит, $\angle LKP = \angle APK = \angle DPM = \angle LMP$.

Итак, углы LKP и LMP, опирающиеся на отрезок LP, равны. Значит, равны и радиусы описанных окружностей треугольников PKL и PLM. Остальные равенства доказываются аналогично.

4.3. [6] Найдите все возрастающие арифметические прогрессии с конечным числом членов, сумма которых равна 1, и каждый член имеет вид $\frac{1}{k}$, где k – натуральное. (*А.Толпыго*)

Решение. Домножив на НОК знаменателей, получим возрастающую арифметическую прогрессию $\{a_i\}$ из n натуральных чисел, сумма S которой делится на каждый член. Члены этой прогрессии, очевидно, не имеют общего делителя, значит, ее разность d взаимно проста с каждым членом. Разберем два случая.

1) $n = 2k$. Тогда $S = \frac{n(a_k + a_{k+1})}{2} = na_{k+1} - kd$, откуда kd, а поэтому и k кратно a_{k+1}. Но это невозможно, так как $a_{k+1} > k$.

2) $n = 2k + 1$. Тогда $S = na_{k+1} = na_k + nd$, откуда $n = 2k + 1$ кратно a_k. Но поскольку $a_k \geq k$, это возможно только при $a_k = k$ и $k = 1$. Отсюда единственный ответ: $^1/_6$, $^1/_3$, $^1/_2$.

4.4. [6] См. 3.5.

4.5. [4+4] См. 3.6.

4.6. [8] На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника P и Q. Для любой стороны многоугольника P многоугольник Q можно зажать между двумя прямыми, параллельными этой стороне. Обозначим через h расстояние между этими прямыми, а через l – длину стороны, и вычислим произведение lh. Просуммировав такие произведения по всем сторонам P, получим некоторую величину (P, Q). Докажите, что $(P, Q) = (Q, P)$. (*Д.Звонкин*)

Решение. Докажем, что $(P, Q) = {}^1/_2 \sum a_i b_j \sin\varphi_{ij} = (Q, P)$, где a_i – стороны P, b_j – стороны Q, φ_{ij} – угол между a_i и b_j.

Зафиксируем некоторую сторону a_i, зажмем многоугольник Q между прямыми, параллельными a_i, и выберем две вершины C и D, *лежащие на этих двух прямых. Контур Q разбивается на две ломаных с концами C* и D. Ввиду выпуклости проекция такой ломаной на перпендикулярную a_i прямую m складывается из проекций звеньев ломаной. Значит, проекция многоугольника Q на m покрывается проекциями его сторон ровно два раза, то есть сумма длин проекций сторон равна удвоенному расстоянию h_i между зажимающими Q прямыми. Длина проекции b_i на m равна $b_i \sin\varphi_{ij}$, значит,

$2h_i = \sum_j b_j \sin\varphi_{ij}$, а $a_i h_i = \frac{1}{2}\sum_j a_i b_j \sin\varphi_{ij}$. Складывая такие суммы по всем i, получим нужную формулу.

4.7. Перед Алешей 100 закрытых коробочек, в каждой – либо красный, либо синий кубик. У Алеши на счету есть рубль. Он подходит к любой закрытой коробочке, объявляет цвет и ставит любую сумму (можно нецелое число копеек, но не больше, чем у него на счету в данный момент). Коробочка открывается, и Алешин счет увеличивается или уменьшается на постав-ленную сумму в зависимости от того, угадан или не угадан цвет кубика. Игра продолжается, пока не будут открыты все все коробочки. Какую наибольшую сумму на счету может гарантировать себе Алеша, если ему известно, что

а) [3] синий кубик только один;

б) [5] синих кубиков ровно n.

(Алеша может поставить и 0, то есть просто бесплатно открыть коробочку и увидеть цвет кубика.) (*А.Буфетов*)

Ответ. **а)** $\frac{2^{100}}{100}$. **б)** $\frac{2^{100}}{C_{100}^n}$

Решение. б) Рассмотрим общую ситуацию: Алеша знает, что есть m красных и n синих кубиков в $m + n = K$ коробочках. Попросим его в таком случае поставить $\frac{|n-m|}{K}$-ю часть своего капитала на тот цвет, которого больше (в частности, при $m = n$ Алеша ничего не ставит). Докажем индукцией по K, что действуя так, Алеша увеличит свой капитал в $\frac{2^K}{C_K^n}$ раз.

Пусть для определенности $m \le n$. Если открыт синий кубик, то на этом шаге Алеша увеличил капитал в $\frac{2n}{K}$ раз, остались n–1 синий кубик и K – 1 коробочка, что, по предположению, даст увеличение капитала в $\frac{2^{K-1}}{C_{K-1}^{n-1}}$ раз. Перемножая эти числа и учитывая, что $C_{K-1}^{n-1}\cdot\frac{K}{n} = C_K^n$, получим требуемое $\frac{2^K}{C_K^n}$. Если открыт красный кубик, капитал уменьшился, умножившись на $\frac{2m}{K}$, и остались n синих кубиков и K – 1 коробочка, что, по предположению, даст увеличение капитала в $\frac{2^{K-1}}{C_{K-1}^n}$ раз. Перемножая, учтем, что $C_{K-1}^n\cdot\frac{K}{m} = C_{K-1}^{m-1}\frac{K}{m} = C_K^m = C_K^n$, и снова получим требуемое.

Покажем теперь индукцией по K, что в большее число раз Алеша капитал увеличить не может. Если Алеша поставит на синий цвет долю большую указанной в алгоритме, то, при выпадении красного, он получит меньше, чем по алгоритму. А если он поставит долю меньше, чем по алгоритму (в том числе отрицательную, если ставит на красный), он получит меньше, чем по алгоритму при выпадении синего.

Второе решение. **а**) Обозначим через B_m наибольший «выигрыш» Алеши для случая m коробочек. Очевидно, $B_1 = 2$.

Если $m > 1$, Алеша делает ставку на цвет первой коробочки. Заметим, что поставить x на красный цвет, это то же самое, что поставить $-x$ на синий. Поэтому можно считать, что Алеша всегда ставит на синий цвет, а $x \in [-1, 1]$.

Если в первой коробочке окажется синий шарик, капитал Алеши станет равным $1 + x$, а в конце игры он (ставя все свои деньги на заведомо известный цвет) может его довести до $(1 + x)2^{m-1}$. Если же в первой коробочке красный шарик, то выигрыш Алеши равен $(1 - x)B_{m-1}$. Итак, $B_m = \max\limits_{x\in[-1,1]} f(x)$, где $f(x) = \min\{(1 + x)2^{m-1}, (1 - x)B_{m-1}\}$. Нарисовав график, видим, что f достигает максимума в той точке x_0, где $(1 + x_0)2^{m-1} = (1 - x_0)B_{m-1}$. Таким образом, $B_m = (1 + x_0)2^{m-1} = (1 - x_0)B_{m-1}$.

Положив $B_m = \dfrac{2^m}{P_m}$, получим $(1 + x_0)P_m = 2$, $(1 - x_0)P_m = 2P_{m-1}$. Сложив последние равенства, имеем $P_m = 1 + P_{m-1}$. Отсюда (поскольку $P_1 = 1$) $P_m = m$.

б) Обозначим через $B_{m,n} = \dfrac{2^m}{P_{m,n}}$ наибольший «выигрыш» Алеши для случая m коробочек и n синих шариков. Очевидно, $B_{1,0} = B_{1,1} = 2$, $B_{m,0} = 2^m$, т.е. $P_{1,0} = P_{1,1} = P_{m,0} = 1$.

Рассуждая аналогично **а**), приходим сначала к системе

$$B_{m,n} = (1 + x_0)B_{m-1,n-1} = (1 - x_0)B_{m-1,n},$$

а потом – к соотношению $P_{m,n} = P_{m-1,n-1} + P_{m-1,n}$.

Это соотношение, очевидно, позволяет однозначно восстановить по указанным выше начальным условиям. Но и им и соотношению, как известно, удовлетворяют биномиальные коэффициенты C_m^n. Следовательно, $P_{m,n} = C_m^n$.

http://www.ashap.info/Turniry/TG/index.html