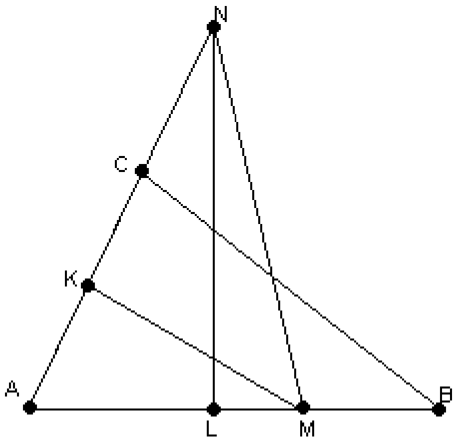
ДВАДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур

Решения задач написаны Л,Э.Медниковым и А.В.Шаповаловым

8 - 9 классы, тренировочный вариант



1. В треугольнике *ABC* угол *A* равен 60°. Серединный перпендикуляр к стороне *AB* пересекает прямую *AC* в точке *N*. Серединный перпендикуляр к стороне *AC* пересекает прямую *AB* в точке *M*. Докажите, что *CB=MN*. *(Р.Г.Женодаров)*

Решение. По свойству серединного перпендикуляра *NA=NB*, откуда треугольник *ANB* равнобедренный. Угол *A* при его основании равен 60°, поэтому треугольник *ANB* равносторонний. Отсюда *AN=AB*. Точно так же, треугольник *AMC* равносторонний, и *AM=AC*. Треугольники *ACB* и *AMN* равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда *BC=MN*.

2. Таблица $n\times n$ заполнена по правилу: в клетках первого столбца записаны 1, в клетках второго – 2, ... , в клетках *n*-го – *n*. Числа на диагонали, соединяющей левое верхнее число с правым нижним, стерли. Докажите, что суммы чисел по разные стороны от этой диагонали отличаются ровно в два раза. *(С.А.Зайцев)*

Решение 1. Сравним для каждой клетки на диагонали сумму чисел *слева* от нее и сумму чисел *над* ней. Если клетка стоит на пересечение *k*-ой строки и *k*-го столбца, то сумма слева равна $1+2+...+(k-1)=k(k-1)/2$ (сумма арифметической прогрессии), а сумма над ней равна $k(k-1)$, то есть ровно вдвое больше. Значит и сумма всех чисел над диагональю в два раза больше суммы всех чисел слева от нее.

Решение 2.

	2	3	4	...	*n*
1		3	4	...	*n*
1	2		4	...	*n*
1	2	3		...	*n*
...	...	...	...	...	...
1	2	3	4	...	

	1	2	3	...	$n-1$
1		1	2	...	$n-2$
1	2		1	...	$n-3$
1	2	3		...	$n-4$
...	...	...	...	...	...
1	2	3	4	...	

В исходной таблице (рис. слева) у нас под диагональю есть $n-1$ единица, $n-2$ двойки, $n-3$ тройки и т.д. Вычтем теперь из каждого числа над диагональю симметричное ему относительно диагонали число под диагональю. Получится таблица слева. В ней над диагональю на параллельных меньших дагоналях стоят одинаковые числа: *n*-1 единица, *n*-2 двойки, n-3 тройки и т.д. В целом мы уменьшили верхнюю сумму на нижнюю и получили в результате нижнюю сумму. Значит, верхняя сумма была вдвое больше нижней.

Решение 3.

	2	3	4	...	n
1		3	4	...	n
1	2		4	...	n
1	2	3		...	n
...	...	...	...	...	...
1	2	3	4	...	

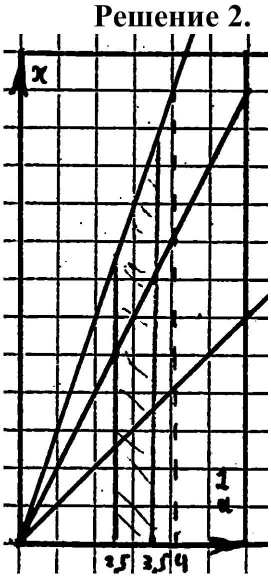
Вычтем нижнюю сумму из верхней и покажем, что останется нижняя. Из i-ой строки верхней суммы вычтем i-ый столбец нижней. i-ая строка верхней суммы имеет вид $i+1$, $i+2$, …, $n-1$, n, а i-ый столбец нижней суммы имеет вид i, i, …, i. Соответственно после вычитания получаем строку 1, 2, …, n-i, что соответствует (n–i+1)-ой строке нижней суммы. Сделав вычитание для всех i получим нижнюю сумму. Значит, верхняя сумма была вдвое больше нижней.

3. Дано положительное число a. Известно, что неравенство $1 < xa < 2$ имеет ровно 3 решения в целых числах x. Сколько решений в целых числах x может иметь неравенство $2 < xa < 3$? Укажите все возможности. *(А.К.Толпыго)*

Ответ. 2, 3 или 4 решения.

Решение 1. Первое неравенство равносильно $1/a < x < 2/a$. На интервале $(1/a\ , 2/a)$ лежат три целые точки. Они разбивают его на два промежутка длины 1 и еще два промежутка по краям, каждый длины не более 1. Поэтому для длины интервала $(1/a\ , 2/a)$ выполнено неравенство: $2<1/a\le4$. Аналогично, если на некотором интервале длины t лежит k целых точек, то выполнено неравенство $k-1<t\le k+1$. Это равносильно неравенству $t-1\le k<t+1$. Второй интервал $(2/a\ , 3/a)$ имеет ту же длину. Подставляя $t=1/a$ и учитывая неравенства для $1/a$, получаем $1<1/a-1\le k<1/a+1\le5$, то есть k=2,3 или 4. Все три случая реализуются: k=2 при $a={}^3/_8$ (x=6 и7); k=3 при $a={}^1/_4$ (x=9, 10 и 11); k=4 при $a={}^5/_{17}$ (x=7, 8, 9 и 10).

Решение 2.



Эту задачу можно решить и графически. Приводим набросок такого решения (все видно из внимательного рассмотрения графика). Неравенства из условия можно переписать в виде $1/a < x < 2/a$ и $2/a< x <3/a$. На координатной плоскости по вертикальной оси будем отмечать x, а по горизонтальной – 1/a. Проведем три прямые: $x=1/a$, $x=2/a$, $x=3/a$. Из графика видно, что нам подходят значения 1/a, принадлежие интервалу (2,5 , 3), или интервалу (3 , 3,5], а также подходит значение 1/a=4. Соответственно целых решений может быть 2,3 или 4.

4. Аня, Боря и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Ани. Она делит их поровну между Борей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем все повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток (если он есть) съедает. Орехов много (больше 3). Докажите, что:

а) хотя бы один орех будет съеден;

b) не все орехи будут съедены.
(М.Н.Вялый)

а). Решение 1. Пусть сначала у Ани всего a орехов. Предположим, что съедания не происходит. Запишем первые несколько шагов:

	Аня	Боря	Витя
Начало	a	0	0
1 шаг	0	$a/2$	$a/2$
2 шаг	$a/4$	0	$3a/4$
3 шаг	$5a/8$	$3a/8$	0

Заметим, что после n-го шага у одного из ребят 0 орехов, а у двух других число орехов имеет вид $xa/2^n$ и $ya/2^n$, где x и y нечетны. Это утверждение легко доказать: если оно верно для n-го шага, то на следующем шаге количества орехов будут равны 0, $xa/2^{n+1}$ и $(2y+x)a/2^{n+1}$, где числа x и $2y+x$ тоже нечетны, то есть утверждение снова верно. Поскольку оно верно для первого шага, то по доказанному верно и для второго, а значит и для третьего, и аналогично для всех остальных. Но поскольку каждый раз у каждого из ребят целое число орехов, число a должно делится на 2^n при любом натуральном n, что невозможно. Значит, на каком-то шаге съедание произойдет.

Решение 2. Если изначально число орехов нечетно, то орех будет съеден при первой дележке. Если число орехов четно, то последим за наибольшей степенью двойки, которая делит число орехов (назовем это *показателем числа*). Показатель нечетного числа равен 1. При сложении двух чисел с разными показателями показатель суммы равен наименьшему из показателей (например, показатель 10 равен 2, показатель 40 равен 8, показатель 50=10+40 равен 2).
Итак, пусть общее число орехов четно, то есть показатель общего числа орехов равен $n>1$. Покажем, что с каждой дележкой без поедания уменьшается показатель числа орехов в кучке, которую делят. Ясно, что при первой дележке он уменьшится вдвое. Далее, если кто-то делит четное число орехов с показателем $m<n$, то он раздает двум другим по числу с показателем $m/2$. У того, кто делил перед этим, орехов не было, поэтому у него окажется число с показателем $m/2$. А какой показатель окажется у другого? Если бы он оказался больше $m/2$, то у суммы орехов показатель был бы равен $m/2$ (как наименьшему из двух показателей). Но на самом-то деле показатель суммы равен n, поскольку общее число орехов не меняется. Значит, и у другого показатель не более $m/2$. А именно ему и предстоит делить. Итак, рано или поздно показатель опустится до 1, придется делить нечетное число орехов, и орех будет съеден.

Решение 3. Пусть число орехов у делящего a, а у следующего за ним b. Если поедания не происходит, то у очередного делящего будет $a'=b+a/2$ орехов, а у следующего за ним $b'=a/2$ орехов. Заметим, что $|a'-2b'|=\frac{|a-2b|}{2}$. То есть такая разность каждый раз делится на два, но при этом должна останется целой. Это невозможно, поэтому съедание произойдет.

б) Если орехов всегда больше 3, все доказано. Иначе рассмотрим момент, когда впервые останется ровно 3 ореха. В любой момент, кроме начального, орехи есть ровно у двоих; при этом у того, кто делит, орехов не меньше, чем у следующего, а у предыдущего их нет совсем. Поэтому при трех орехах у делящего их обязательно 2. Значит, при трех орехах поедания не происходит.

5. У Пети есть n^3 белых кубиков $1\times1\times1$. Он хочет сложить из них куб $n\times n\times n$, снаружи полностью белый. Какое наименьшее число граней кубиков может Вася закрасить, чтобы помешать Пете? Решите задачу, если **а)** $n=2$; **б)** $n=3$. *(Р.Г.Женодаров)*

Ответы. а) 2 грани. **б)** 12 граней.

а). Решение. Одной закрашенной грани, очевидно, не хватит. Достаточно, однако, закрасить в каком-то кубике две противоположные грани: при складывании куба $2\times2\times2$ одна из них всегда окажется снаружи.

б). Решение 1. Достаточно закрасить все грани двух кубиков: ведь при складывании куба $3\times3\times3$ полностью спрятать можно только один кубик.

Покажем, как Пете справиться с заданием при 11 или менее закрашенных гранях. В этом случае максимум один кубик может быть окрашен полностью, и максимум 5 кубиков могут иметь не менее двух окрашенных граней. Сперва выберем кубик с наибольшим числом закрашенных граней на роль центра куба. Среди оставшихся кубиков нет полностью окрашенного, значит, все они годятся на роль центрального кубика грани. Отберем на эту роль 6 кубиков с наибольшим числом закрашенных граней. Теперь у нас не останется кубиков с двумя или более закрашенными гранями. Поэтому остальные кубики годятся при постороении большого куба на любую роль: уж одну окрашенную грань спрятать всегда можно.

б). Решение 2. Достаточно закрасить полностью два кубика. Пусть закрашено 11 граней. Красить у кубика одну грань бесполезно: ее можно скрыть при любом положении кубика. Поэтому есть не более пяти кубиков с закрашенными гранями. Тот из них, у которого закрашено больше всего граней, поместим в центр большого куба, а остальные — в центры его граней, незакрашенными гранями наружу. Последние у всех кубиков, помещенных в центры граней, найдутся, потому что полностью закрашенный кубик может быть только один (и если он есть, то окажется в центре).

10 - 11 классы, тренировочный вариант

Решения задач

1. Имеется выпуклый многогранник со 100 ребрами. Все его вершины срезали плоскостями-ножами близко от самих вершин (то есть так, чтобы плоскости-ножи не пересекались друг с другом внутри или на границе многогранника). Найдите у полученного многогранника

а) число вершин;

б) число ребер.

(Г.А.Гальперин)

Ответ. а) 200; **б)** 300.

Решение. Заметим, что на каждом ребре исходного многогранника лежат две вершины полученного, причем из каждой вершины полученного многогранника выходит по три ребра. Следовательно в полученном многограннике $2\cdot100=200$ вершин и $\frac{200\cdot3}{2}$ $=300$ ребер.

2. Найдутся ли такие функции *p(x)* и *q(x)*, что *p(x)* – четная функция, а *p(q(x))* – нечетная функция (отличная от тождественно нулевой)? *(А.Д.Блинков, В.М.Гуровиц)*

Ответ. Да, найдутся.

Решение. Рассмотрим функции $p(x)=\cos x$ и $q(x)=\frac{\pi}{2}-x$

Очевидно, $p(x)$ – четная функция, а $p(q(x))=\sin x$ – нечетная.

Задача имеет много других решений.

3. Дано положительное число a. Известно, что неравенство $10<a^x<100$ имеет ровно 5 решений в натуральных числах x. Сколько решений в натуральных числах x может иметь неравенство $100<a^x<1000$? Укажите все возможности. *(А.К.Толпыго)*

Ответ. 4,5 или 6.

Решение. Пусть $a=10^b$. Неравенство $10<a^x<100$ можно переписать как $10<10^{bx}<100$ или, что то же самое $1<bx<2$, аналогично перепишем $100<a^x<1000$ как $2<bx<3$. Если n - наименьшее натуральное решение $1<bx<2$, то $b(n-1)<1<bn$ и $b(n+4)<2<b(n+5)$. Сложив первое из этих неравенств с самим собой и со вторым, получим соответственно $b(2n-2)<2<b(2n)$ и $b(2n+3)<3<b(2n+5)$, откуда следует, что неравенство $2<bx<3$ имеет от 4 до 6 натуральных решений ($2n,..,2n+3$ всегда являются решениями, а $2n-1$ и $2n+4$ могут не являться). Покажем, что, в зависимости от b, все три варианта возможны (здесь выписаны все натуральные решения неравенств $1<bx<2$ и $2<bx<3$).

$b=\frac{5}{23}$; решения первого неравенства - 5, 6, 7, 8, 9, решения второго - 10, 11, 12, 13.

$b=\frac{5}{26}$; решения первого неравенства - 6, 7, 8, 9, 10, решения второго - 11, 12, 13, 14, 15.

$b=\frac{5}{27}$; решения первого неравенства - 6, 7, 8, 9, 10, решения второго -11, 12, 13, 14, 15, 16.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, $AB=AD$. На стороне BC взята точка M, а на стороне CD - точка N так, что угол MAN равен половине угла BAD. Докажите, что $MN=BM+ND$. *(М.И.Малкин)*

Решение 1. Точку B симметрично отразим относительно AM, получаем точку R. Точку D симметрично отразим относительно AM, получаем ту же самую точку R (поскольку $AD=AB$ и угол MAN равен сумме углов NAD и MAB). Так как ABCD – вписанный, сумма углов ABC и ADC равна 180°, а значит и сумма углов ARM и ARN равна 180°, откуда MRN – прямая. Поэтому $BM+ND=MR+NR=MN$.

Решение 2. Повернем мысленно треугольник MAB вокруг точки A так, чтобы сторона AB совместилась со стороной AD. Обозначим через M' точку, в которую перешла бы точка M при таком повороте. Так как ABCD – вписанный, сумма углов ABC и ADC равна 180° , а значит и сумма углов ADN и ADM' равна 180° , откуда $M'DN$ – прямая. Треугольники NAM' и NAM равны по первому признаку (углы NAM и $M'AN$ равны, так как угол MAN равен сумме углов NAD и MAB, AN – общая сторона, AM и AM' равны по построению). Поэтому $MN=M'N=ND+DM'=ND+BM$.

5. У Пети есть n^3 белых кубиков $1\times1\times1$. Он хочет сложить из них куб $n\times n\times n$, снаружи полностью белый. Какое наименьшее число граней кубиков может Вася закрасить, чтобы помешать Пете? Решите задачу, если **а)** $n=3$; **б)** $n=1000$. *(Р.Г.Женодаров)*

Ответ. а) 12; **б)**1999999986.

Замечание: В кубе $n\times n\times n$ 8 угловых кубиков имеют три наружных грани, $12(n-2)$ примыкающих к ребрам – две наружных грани, $6(n-2)^2$ – одну наружную грань, остальные кубики наружных граней не имеют. Чтобы Петя не смог поместить кубик в угол, Васе надо покрасить как минимум 2 его грани (противоположные). Чтобы кубик нельзя было поместить на ребро (не в угол) – как минимум 4 грани (кроме двух противоположных). Чтобы кубик нельзя было поместить на грань (не на ребро), надо обязательно красить все 6 граней кубика.

а). Решение. В случае n=3 Васе достаточно покрасить полностью два кубика (12 граней), чтобы помешать Пете, так как одна из этих граней обязательно окажется снаружи. Если Вася покрасил не более 11 граней, то Петя сможет выбрать 8 кубиков, у которых покрашено не более одной грани (иначе покрашенных граней не менее $2\cdot(27\text{-}7)=40$), далее выбрать 12 кубиков, у которых покрашено не более 3 граней ($4\cdot(27\text{-}8\text{-}11)=32>11$), и 6 кубиков, у которых покрашено не более 5 граней ($6\cdot(27\text{-}8\text{-}12\text{-}5)=12>11$). После этого Петя сможет поместить эти кубики в углы, ребра и середины граней соответственно так, чтобы все покрашенные грани оказались внутри.

Другое решение смотрите в тренировочном варианте младших классов, задача 5б.

б). Решение 1. В случае n=1000 Васе достаточно покрасить по две противоположных грани у 1000^3-7 кубиков, т.е. всего 1999999986 грани. При этом одна из внешних граней какого-нибудь углового кубика обязательно окажется покрашенной, как бы ни был сложен большой куб. Если же Вася покрасил не более $2\cdot(1000^3\text{-}7)\text{-}1=2\cdot1000^3\text{-}15$ граней, то Петя сможет выбрать 8 из них, у которых покрашено не более одной грани ($2\cdot(1000^3\text{-}7)> 2\cdot1000^3\text{-}15$), далее выбрать $12\cdot998$, у которых покрашено не более 3 граней ($4\cdot(1000^3\text{-}8\text{-}12\cdot998+1)>2\cdot1000^3\text{-}15$), и $6\cdot998^2$, у которых покрашено не более 5 граней ($6\cdot(1000^3\text{-}8\text{-}12\cdot998\text{-}6\cdot998^2+1)>2\cdot1000^3\text{-}15$). После этого Петя сможет сложить из них куб, белый снаружи.

б). Решение 2. *Раскраска*. Семь кубиков оставляем чистыми, а у прочих красим по две параллельные грани. Хотя бы один из кубиков с окрашенными гранями окажется угловым. *Оценка*. Если всего окрашено менее, чем $2\times1000^3–14$ граней, кубиков, у которых окрашено не больше одной грани, будет по крайней мере 8. Сделаем их угловыми, спрятав, если надо, окрашенную грань. Кубиков, у которых окрашено не меньше 3 граней, будет не более $2\times1000^3/3 < 998^3$. Спрячем их внутрь куба с ребром 1000, а у остальных, лежащих внутри граней и на ребрах этого куба, две или одну окрашенную грань всегда можно спрятать.

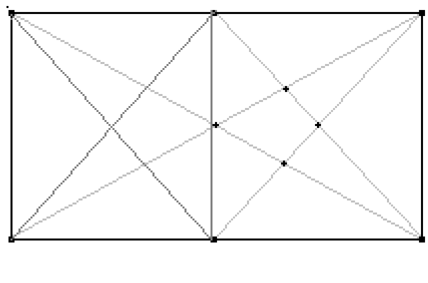
8 - 9 классы, основной вариант

Решения задач

1. Бильярдный стол имеет вид прямоугольника 2×1, в углах и на серединах больших сторон которого расположены лузы. Какое наименьшее число шаров надо расположить внутри прямоугольника, чтобы любая луза находилась на одной линии с некоторыми двумя шарами? (Лузы и шары считайте точками.) *(Б.Р.Френкин)*

Ответ. 4 шара.

Решение. Пример для 4 шаров приведен на рисунке. Покажем, что 3 шаров недостаточно. Прямая, проходящая через пару шаров внутри прямоугольника, пересекает границу прямоугольника ровно в двух точках. У нас есть 6 луз, значит, нужно не менее 3 прямых. Три шара дадут три прямых только если эти прямые образуют треугольник. Однако все возможные прямые приведены на картинке, и никакие из них не образуют треугольник с вершинами внутри биллиарда.



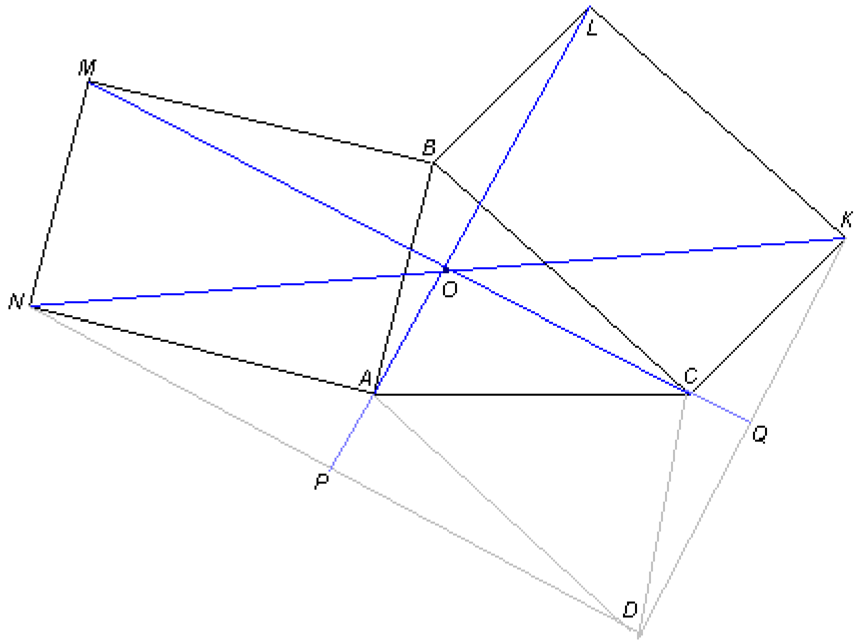
2. Докажите, что можно найти 100 пар целых чисел, так чтобы в десятичной записи каждого числа все цифры были не меньше 6, и произведение чисел каждой пары тоже было числом, где все цифры не меньше 6. *(С.И.Токарев, А.В.Шаповалов)*

Решение. Годятся все пары вида (7, 9....97), поскольку произведение равно 67...79.

3. Дан остроугольный треугольник *ABC*. На сторонах *AB* и *BC* во внешнюю сторону построены равные прямоугольники *ABMN* и *LBCK* так, что *AB*=*LB*. Докажите, что прямые *AL*, *CM* и *NK* пересекаются в одной точке. *(А.Гаврилюк)*

Решение 1. Рассмотрим окружности, описанные около данных прямоугольников. Обозначим вторую точку их пересечения через *O*. Тогда $\angle BON=\angle BOK=90°$. Значит точки *N*, *O*, *K* лежат на одной прямой, перпендикулярной *BO*. Заметим, что углы *NBA* и *LBK* равны (так как равны соответствующие треугольники). Поскольку углы, опирающиеся на одну дугу, равны, получаем тогда цепочку равенств: $\angle NOA=\angle NBA=\angle LBK=\angle LOK$, а значит точки *A*, *O*, *L* также лежат на одной прямой. Аналогично, точки *M*, *C*, *O* лежат на одной прямой. Поэтому *O* – точка пересечения этих трех прямых.

Решение 2.



Построим параллелограмм *ABCD*. Тогда *ALKD* и *CDNM* – также параллелограммы. Равнобедренный ΔCBM получается из ΔABL поворотом на 90° и гомотетией, поэтому $CM \perp AL$, но тогда и $CM \perp KD$. Продолжение *MC* высота CQ в равнобедренном треугольнике *KCD* будет медианой, значит *CM* – серединный перпендикуляр к *KD* . Аналогично *AL* – серединный перпендикуляр к *ND*. Параллелограмм *OPDQ* – прямоугольник, поэтому треугольник *KDN* – прямоугольный, и серединные перпендикуляры к катетам проходят через середину его гипотенузы *KN*.

Замечание к решению 2. Перпендикулярность *AL* и *CM* можно доказать и без поворотной гомотетии, просто счетом углов. Пусть $\angle ABC=b$. В равнобедренных треугольниках *ABL* и *MBC* углы при вершине *B* равны b+90°, поэтому углы при основаниях равны 45°-b/2. Отсюда

$\angle AOC=180°-\angle OAC-\angle OCA=180°-\angle BAC-\angle BCA+2(45°-b/2)=\angle ABC+2(45°-b/2)=90°$.

4. Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа 2^n начинается цифрой 5, а десятичная запись числа 5^n начинается цифрой 2? *(Г.А.Гальперин)*

Решение. Нет. Произведение $2^n\ 5^n=10^n$. Если в записях 2^n и 5^n заменить нулями все цифры, кроме первых, каждое из чисел уменьшится, но не более чем в 2 раза. Произведение замененных чисел будет меньше 10^n, но не более чем в 4 раза, поэтому оно не будет иметь вид 10...0. Однако если бы одно из замененных чисел начиналось на 5, а другое – на 2, произведение было бы 50...0 20...0=10...0. Противоречие.

5. В таблице 2005×2006 расставлены числа 0, 1, 2 так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке делится на 3. Какое наибольшее возможное количество единиц может быть в этой таблице? *(И.И.Богданов)*

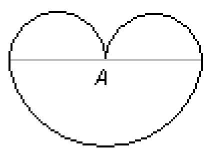
Решение. Пусть в таблице n нулей и d двоек. У нас есть 2005 строк длины 2006 и 2006 столбцов длины 2005. Чтобы сумма в строке делилась на 3, там должна быть хотя бы одна двойка или минимум два нуля. Отсюда $d+n/2\geq 2005$. Аналогично, в каждом столбце должен быть нуль либо две двойки минимум, поэтому $n+d/2\geq 2006$. Сложив неравенства и поделив на $^3/_2$, получим $n+d\geq 2674$, то есть не единиц в таблице минимум 2674.

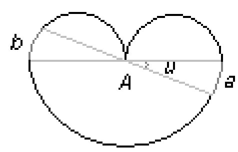
Этот результат достигается: заменив неравенства на равенства и решив систему уравнений, найдем n=1338, d=1336. Расставим в таблице 1338 нулей горизонтальными парами, начиная с левого верхнего угла (в 669 строк и 1338 столбцов) и 1336 двоек вертикальными парами, начиная с правого нижнего угла (в 1336 строк и 668 столбцов), а остальные клетки заполним единицами (см. рис). Поскольку 669+1336=2005 и 1338+668=2006, то нули или двойки будут в каждой строке и каждом столбце, причем как раз столько, сколько нужно для делимости суммы на 3. Итак, ответ: наибольшее число единиц 2005·2006–2674=4022030.

0	0	1	1	...	1	1
1	1	0	0	...	1	1
...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	...	2	1
1	1	1	1	...	2	1
1	1	1	1	...	1	2
1	1	1	1	...	1	2

6. Криволинейный многоугольник - это многоугольник, стороны которого - дуги окружностей. Существуют ли такой криволинейный многоугольник P и такая точка A на его границе, что любая прямая, проходящая через точку A, делит периметр многоугольника P на два куска равной длины? *(С.В.Маркелов)*

(Другими словами: Назовем *тропинкой* замкнутую траекторию на плоскости, состоящую из дуг окружностей и проходящую через каждую свою точку ровно один раз. Существуют ли тропинка и такая точка A на ней, что любая прямая, проходящая через A, *делит тропинку пополам*, то есть сумма длин всех кусков тропинки в одной полуплоскости равна сумме длин всех кусков тропинки в другой полуплоскости.)





Решение. Как ни странно – существует, см. верхний рисунок. Возьмем произвольный отрезок с серединой A и построим на нем как на диаметре полуокружность, а по другую сторону отрезка – две полуокружности на половинках отрезка как на диаметрах. Периметр фигуры равен двум меньшим окружностям.

Ясно, что исходный отрезок делит периметр пополам. Проведем любую другую прямую через точку A под некоторым углом u (измеренным в радианах) к отрезку (см. нижний рисунок). От нижней части отнялась дуга a и прибавилась дуга b. Убедимся, что длины дуг равны. Пусть r – радиус меньшей полуокружности. Поскольку это вписанный угол, то $b=2ur$. У большей окружности радиус $2r$, зато угол – центральный, поэтому $a=u\cdot 2r$.

7. Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы 5×5, заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице, затем вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел, вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Может ли случиться, что сумма чисел, выбранных Яшей

а) больше суммы чисел, выбранных Юрой?

б) больше суммы любых других 5 чисел исходной таблицы, удовлетворяющих условию: никакие два из них не лежат в одной строке или в одном столбце?

(С.И.Токарев, А.Ю.Эвнин)

Решение. а) Нет, не может. Обозначим числа в порядке их выбора: Юрины – b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, Яшины – m_0, m_1, m_2, m_3, m_4. Покажем, что если $i+j<5$, то $b_i \geq m_j$. Номер равен числу строк и числу столбцов, вычеркнутых при выборе соответствующего числа. Так, при выборе b_1 были вычеркнуты одна строка и один столбец, а при выборе m_3 – 3 строки и 3 столбца. В сумме вычеркнуты максимум 4 строки и максимум 4 столбца, поэтому по крайней мере одно число a осталось невычеркнутым в обоих случаях. Юра выбирал наибольшее из невычеркнутых, поэтому $b_1 \geq a$. Яша выбирал наименьшее из невычеркнутых, поэтому $a \geq m_3$. Значит, $b_1 \geq m_3$. Аналогично, $b_0 \geq m_4$, $b_2 \geq m_2$, $b_3 \geq m_1$, $b_4 \geq m_0$. Значит, Юрина сумма не меньше Яшиной.

б) Решение 1. Да, может. Рассмотрим, например, таблицу

10000	1001	1002	1003	1004
1005	**1000**	101	102	103
1006	104	**100**	11	12
1007	105	13	**10**	2
1008	106	14	3	**1**

Здесь сумма чисел, выбранных Яшей 11111 (они выделены). Покажем, что нельзя получить больше. Действительно, если не брать число 10000, то сумма будет менее 1008*5=5040, значит надо брать 10000. Если не брать число 1000, то сумма будет менее 10000+106*4=10424, значит надо брать 1000. Если не брать число 100, то сумма будет менее 10000+1000+14*3=11042, значит надо брать. Аналогично надо брать и 10, и 1. В итоге получаем Яшины числа.

б) Решение 2. Да, может. Рассмотрим, например, таблицу

111	210	310	410	510
120	221	320	420	520
130	230	331	430	530
140	240	340	441	540
150	250	350	450	551

Будем складывать числа любой разрешенной пятерки столбиком. В разряде единиц сумма будет равна количеству чисел на диагонали. В разряде десятков сумма всегда будет 1+2+3+4+5 (эта цифра зависит только от строки, а у нас есть представитель каждой строки). Аналогично, и в разряде сотен сумма равна 1+2+3+4+5 (цифра сотен зависит только от столбца). Значит, наибольшей будет сумма, где все 5 чисел взяты с диагонали. Ясно, однако, что именно их-то Яша и выберет.

10 – 11 классы, основной вариант

Решения задач

1. Дан выпуклый 100-угольник. Докажите, что можно отметить такие 50 точек внутри этого многоугольника, что каждая вершина будет лежать на прямой, соединяющей какие-то две из отмеченных точек. *(Б.Р.Френкин)*

Решение 2. Занумеруем вершины 100-угольника по часовой стрелке: 1, …, 100. Рассмотрим 10-угольник, образованный вершинами 1, 2, 21, 22, 41, 42, 61, 62, 81, 82. Его вершины можно разместить на пяти прямых 1-22, 21-42, 41-62, 61-82, 81-2, заданных пятью точками пересечения первой прямой со второй, второй – с третьей, …, пятой – с первой (очевидно, что эти пять точек различны). Аналогично поступим с десятиугольниками, номера вершин которых получаются из номеров вершин рассмотренного прибавлением чисел 2, 4, …, 18.
Задача имеет много других решений.

2. Существуют ли такие натуральные числа n и k, что десятичная запись числа 2^n начинается числом 5^k, а десятичная запись числа 5^n начинается числом 2^k?

(Г.А.Гальперин)

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Если бы при каком-то натуральном n число 2^n начиналось с 5^k, а число 5^n — с 2^k, это означало бы, что $5^k\times10^s < 2^n < (5^k+1)\times10^s$ и $2^k\cdot10^l < 5^n < (2^k+1)\cdot10^l$, откуда $10^{k+l+s} < 10^n < 10^{k+l+s+1}$, что невозможно. (Последнее неравенство $10^n < 10^{k+l+s+1}$ вытекает, например, из того, что $5^k+1 < 2\cdot5^k$, а $2^k+1 < 5\cdot2^k$).

3. Дан многочлен $P(x) = x^4+x^3-3x^2+x+2$. Докажите, что любая целая положительная степень этого многочлена имеет хотя бы один отрицательный коэффициент.
(М.И.Малкин)

Решение 1. Заметим, что для любого многочлена $P(x)$ его значение в точке x=1 - это сумма всех его коэффициентов. Поэтому в нашем случае сумма коэффициентов у многочлена $(P(x))^n$ равна $(P(1))^n = (1+1-3+1+2)^n=2^n$. Но при этом свободный член у многочлена $(P(x))^n$ равен $(P(0))^n =2^n$, а коэффициент при x^n равен 1, и в сумме уже они дают 2^n+1. Значит среди остальных коэффициентов $(P(x))^n$ есть отрицательные.

Решение 2. Член третьей степени у многочлена $(P(x))^n$ складывается из n слагаемых вида $2^{n-1}x^3$ и $n(n-1)$ слагаемых вида $-3x^2\cdot x\cdot 2^{n-2}$, то есть коэффициент при x^3 у этого многочлена равен $n2^{n-1}-3n(n-1)2^{n-2} = 2^{n-2}(-3n^2+5n) = n2^{n-2}(-3n+5)$, то есть отрицателен при любом $n \geq 2$.

Решение 3. Заметим, что $(P(0))^n =(P(1))^n =2^n$. По теореме Лагранжа производная $Q(x)$ многочлена $(P(x))^n$ принимает значение 0 на интервале (0;1). Поскольку не все коэффициенты многочлена $Q(x)$ равны 0, у $Q(x)$ есть хотя бы один отрицательный коэффициент, а значит и у $P(x)$ тоже.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA', на отрезке AA' выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B', а прямая CX пересекает AB в точке C'. Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P, а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PAC и QAB равны. *(М.А.Волчкевич)*

Решение. Введем обозначение: $h_M(l)$ будет означать расстояние от точки M до прямой l. Мы много раз будем пользоваться следующей несложной леммой: *если даны три луча OL, OM и ON, то для всех точек K на луче OM отношение $h_K(OL)/h_K(ON)$ одно и то же.*
Для решения задачи достаточно доказать, что $h_P(AC)/h_P(AA') = h_Q(AB)/h_Q(AA')$ (ведь равенство этих отношений как раз и означает, в силу равенства углов $A'AC$ и $A'BC$, что прямая AP проведена под таким же углом к прямой AC, как и прямая AQ к прямой AB).
По лемме верны равенства

$$h_P(BC)/h_P(AC) = h_X(BC)/h_X(AC) \quad \text{и} \quad h_Q(BC)/h_Q(AB) = h_X(BC)/h_X(AB),$$

откуда (учитывая, что $h_X(AC)= h_X(AB)$, поскольку X лежит на биссектрисе AA') получаем, что $h_P(BC)/ h_P(AC)= h_Q(BC)/ h_Q(AB)$.
Поэтому для решения задачи достаточно доказать, что $h_P(BC)/ h_P(AA')= h_Q(BC)/ h_Q(AA')$.
По лемме последнее равенство равносильно такому: $h_{B'}(BC)/ h_{B'}(AA')= h_{C'}(BC)/ h_{C'}(AA')$.
Пусть $\angle BAC=2\alpha$. Заметим, что $h_{B'}(AB)\ h_{B'}(AA')=\sin 2\alpha /\sin \alpha = h_{C'}(AC)/ h_{C'}(AA')$.
Поэтому для решения задачи достаточно доказать равенство

$$h_{B'}(BC)/ h_{B'}(AB)= h_{C'}(BC)/ h_{C'}(AC).$$

По лемме последнее равенство равносильно равенству

$$h_X(BC)/ h_X(AB)= h_X(BC)/ h_X(AC),$$

что очевидно (так как $h_X(AC)= h_X(AB)$). Задача решена.

5. Докажите, что можно найти бесконечно много пар целых чисел, так чтобы в десятичной записи каждого числа все цифры были не меньше 7, и произведение чисел каждой пары тоже было числом, где все цифры не меньше 7. *(С.И.Токарев)*

Решение 1. Годятся все пары вида (9…98877, 8…87), где в первом и втором числах поровну цифр. Их произведение, как показывает умножение «в столбик», равно 8…878887…79899, где вначале идут n–3 восьмерки, потом — 7888, потом — n–3 семерки и 9899.

Решение 2. Рассмотрим два числа: 877...7 (k-1 семёрка) и 899...9987 (k-3 девятки), тогда их произведение - это число 7899...998788...8899 (k-4 девятки и k-2 восьмёрки).

6. На окружности сидят 12 кузнечиков в различных точках. Эти точки делят окружность на 12 дуг. По сигналу кузнечики одновременно прыгают по часовой стрелке, каждый — из конца своей дуги в ее середину. Образуются новые 12 дуг, прыжки повторяются, и т.д. Может ли хотя бы один кузнечик вернуться в свою исходную точку после того, как им сделано
а) 12 прыжков?
б) 13 прыжков?
(А.К.Толпыго)

Ответ: а), б) нет, не может.

а). Решение 1. Назовем одновременные 12 прыжков кузнечиков ходом. Предположим, что один из кузнечиков (назовем его первым) вернулся в исходную точку (назовем ее A) после 12 ходов. Заметим, что порядок кузнечиков на окружности не меняется. Поэтому остальные 11 кузнечиков должны будут перепрыгнуть через точку A (хотя бы раз) до возвращения туда первого кузнечика. Но за один ход через точку A сможет перепрыгнуть не более чем 1 кузнечик, а на первом ходу через точку A не перепрыгнет ни один из кузнечиков! Поэтому за 12 ходов через точку A перепрыгнут максимум 11 кузнечиков, то есть первый еще не сможет вернуться в A. Противоречие.

а). Решение 2. Предположим противное, то есть один из кузнечиков (кузнечик №1) вернулся в исходную точку после 12 прыжков. Заметим, что данная ситуация эквивалентна следующей: на луче Ox мы размещаем бесконечное количество кузнечиков, причём сначала размещаем 12 кузнечиков просто развернув окружность в отрезок, разрезав её в том месте, где сидел кузнечик №1 (предположим, что обход окружности по часовой стрелке будет совпадать с положительным направлением оси Ox). Далее будем считать, что кузнечик находится только в левом конце отрезка (то есть в точке 0), а к правому мы прикрепим точно такой же отрезок с кузнечиками в тех же точках и т. д.(мы получили луч, с отмеченными на нём точками A_1, A_2, ...). В новой модели кузнечики прыгают в положительном направлении в середину отрезка до следующего кузнечика. В результате по нашему предположению мы получим, что первый кузнечик за 12 прыжков либо попал в точку A_{13}, либо выпрыгнул за пределы отрезка $[A_1, A_{13}]$. Докажем по

индукции, что после n прыжков *i*-ый кузнечик находится в центре масс системы ((A_i, C(0, n)г), (A_{i+1}, C(1, n)г), ... (A_{i+n}, C(n, n)г) (на первом месте стоит расположение груза, на втором его масса, C(k, n)=n!/(k!·(n-k)!)) Заметим, что если в точки A_i, A_{i+1} поместить грузики массы 1г, то после первого прыжка первый кузнечик попадёт в центр масс системы ((A_i, 1г), (A_{i+1}, 1г)), так как это и есть середина отрезка. Таким образом, база индукции проверена. Предположим, что после n прыжков i-ый кузнечик находится в центре масс системы ((A_i, C(0, n)г), (A_{i+1}, C(1, n)г), ... (A_{i+n}, C(n, n)г), а i+1ый в точке ((A_{i+1}, C(0, n)г), (A_{i+2}, C(1, n)г), ... (A_{i+n+1}, C(n, n)г), тогда середина отрезка, их соединяющего имеет те же координаты, что и центр масс системы ((Ц.М.((A_i,C(0,n)г),..(A_{i+n},C(n,n)г),1г), (Ц.М.((A_i+1,C(0,n)г),. .(A_{i+n+1},C(n,n)г)),1г)
что совпадает с центром масс системы ((A_i,C(0,n)г),(A_{i+1},(C(1,n)+C(0,n))г),..(A_{i+n},(C(n,n) +C(n1,n))г)),(A_{i+n+1},C(n,n)г),
а это и есть центр масс системы ((A_i, C(0, n+1)г), ... (A_{i+n+1}, C(n+1, n+1)г), то есть шаг индукции доказан.

Теперь заметим, что это означает, что после 12 прыжков первый кузнечик окажется в центре масс системы ((A_1, C(0, 12)г), ... (A_{13}, C(12, 12)г), а эта точка явно находится внутри отрезка [A_1, A_{13}] - противоречие.

б). В этом случае после 13 прыжков кузнечик окажется в центре масс системы ((A_1, C(0, 13)г), ... (A_{14}, C(13, 13)г), но эту же точку можно представить как центр масс системы из двух точек с некоторыми весами в них: первая - Ц.М.((A_2, C(1, 13)г), ... (A_{13}, C(12, 13)г), а вторая - Ц.М.((A_1, C(0, 13)г),(A_{14}, C(13, 13)г). Ясно, что первая точка находится внутри отрезка [A_1, A_{13}]. Кроме того C(0, 13)=C(13, 13) и $A_1A_2=A_{13}A_{14}$, а значит и вторая точка находится внутри отрезка [A_1, A_{13}], а следовательно, и центр масс этих точек с произвольными положительными весами находится внутри отрезка [A_1, A_{13}].

7. Муравей ползает по замкнутому маршруту по ребрам додекаэдра, нигде не разворачиваясь назад. Маршрут проходит ровно два раза по каждому ребру. Докажите, что некоторое ребро муравей оба раза проходит в одном и том же направлении. (Напомним, что у додекаэдра 20 вершин, 30 ребер и 12 одинаковых граней в виде пятиугольника, в каждой вершине сходится 3 грани.) *(А.В.Шаповалов)*

Решение. Предположим, что существует маршрут, при обходе по которому каждое рёбро проходится в обоих направлениях. Рассмотрим некоторую вершину A и трёх её соседей B, C, D. Допустим, что в некоторый момент муравей приполз в вершину A, (предположим, что он попал в A из вершины B) тогда после этого он может поползти либо в C либо в D. Если он пополз в C, то позже он должен будет в некоторый момент проползти из C в A (так как по предположению второй раз из A в C он проползти не может), далее из точки A он должен ползти в точку D так как иначе ему в какой-то момент будет необходимо проползти по маршруту D-A-D, что запрещено по условию. После чего он в какой-то момент проползёт из D в A а затем будет обязан поползти в B. Таким образом мы получили два варианта прохождения этого перекрёстка (два типа развилки) (B-A-C, C-A-D, D-A-B) и (если в первый раз муравей свернёт не в C, а в D) (B-A-D, D-A-C, C-A-B). По-другому эти два типа развилок можно охарактеризовать одним из двух правил: либо, придя в вершину, муравей всегда поворачивает налево, либо наоборот - всегда направо. Определим теперь для каждой вершины (развилки) её тип. Заметим теперь, что если выпустить муравья из произвольной вершины по некоторому ребру, то его дальнейшее движение однозначно определяется этими типами развилок. Таким образом, всякому разбиению развилок на "правые" и "левые" соответствует некоторый набор непересекающихся (по ребру, проходимому в одну сторону) циклов - замкнутых маршрутов движений муравья (мы не утверждаем, что такой набор ставится в соответствие единственным способом, но нам это и не требуется).
Мы считаем, что изначально имеется один такой цикл, проходящий по всем рёбрам по 2

раза. Начнём теперь поочерёдно на всех развилках с правилом "повернуть направо" заменять это правило на "повернуть налево". После первой же такой операции, вполне возможно, наш изначальный цикл распадётся на несколько. Однако понятно, что будут однозначно определены несколько замкнутых маршрутов, на которые он распался. Изучим теперь, насколько может меняться количество замкнутых маршрутов при смене типа развилки в додекаэдре, а именно докажем, что при этой операции чётность кол-ва циклов не меняется. Предположим, что у нас имеется перекрёсток (B-A-C, C-A-D, D-A-B). Рассмотрим несколько случаев на конфигурацию маршрутов, проходящих через изменяемую вершину:

а) У нас имелось 3 разных замкнутых маршрута (B-A-C-...B), (C-A-D-...-C) и (D-A-B-...D), тогда после замены правила поворотов получим: (C-A-B-...-D-A-C-...-B-A-D-...-C), то есть в этом случае четность количества циклов не изменилась (их общее количество изменилось на 2).

б) У нас имелось 2 различных замкнутых маршрута (B-A-C-...B) и (C-A-D-...-D-A-B-...-C), тогда после замены типа перекрёстка образуются маршруты (C-A-B-...-C) и (B-A-D-...-D-A-C-...-B) – четность не изменилась.

в) Имелся один маршрут (B-A-C-...-C-A-D-...-D-A-B-...-B) тогда после замены типа перекрёстка получилось (B-A-D-...-D-A-C-...-C-A-B-...-B) – чётность снова не изменилась.

Все остальные случаи могут быть получены из рассмотренных сменой обозначений. Таким образом, у нас после каждой замены типа перекрёстка остаётся нечётное число маршрутов. Однако после того как на всех перекрёстках муравей станет "поворачивать налево", единственным способом разбить весь додекаэдр на маршруты окажется просто обойти все грани по границе (т.е. каждый маршрут будет состоять из 5 ребёр и огибать какую-то грань). Очевидно, что тогда всего маршрутов окажется 12, что противоречит нечётности их числа.

www.ashap.info/Turniry/TG/index.html