РЕШЕНИЯ
задач 27 турнира городов
Осенний тур, тренировочный вариант
для младших (Базовая школа и 1 курс гимназии)

Основная школа и 1 курс гимназии, Стокгольм, 12 ноября 2005 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

1. Дан треугольник ABC. Точки M_1, M_2, M_3 – середины сторон AB, BC и AC, а точки H_1, H_2 и H_3 – основания высот, лежащие на тех же сторонах. Докажите, что из отрезков H_1M_2, H_2M_3 и H_3M_1 можно построить треугольник.

Решение. H_1M_2 – медиана, проведенная к гипотенузе BC прямоугольного треугольника BH_1C, поэтому $H_1M_2= BC/2$. Точно так же, $H_2M_3= AC/2$, $H_3M_1= AB/2$. А из половинок сторон треугольника ABC конечно же составляется вдвое меньший треугольник.

2. В каждой вершине куба записано по числу. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трех соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в каждой вершине оказалось исходное число. Обязательно ли все исходные числа были одинаковы?

Решение. Не обязательно. Раскрасим вершины куба в черный и белый цвета так, чтобы конца каждого ребра были разного цвета. В 4 белые вершины впишем по единице, а в 4 белые – по нулю. В результате одной операции нули и единицы поменяются местами. А после двух – вернутся на свои места. Точно также и после любого четного числа операций (в частности, после 10) все числа вернутся на свои места.

3. Отрезок единичной длины разбили на одиннадцать отрезков, длина каждого из которых не превосходит a. При каких значениях a можно утверждать, что из любых трех получившихся отрезков можно составитьтреугольник?

Ответ. При $^1/_{11}\le a<0{,}1$

Решение. Поскольку самый длинный отрезок не короче $^1/_{11}$, то $^1/_{11}\le a$. Если $a\ge 0{,}1$, то можно разбить на 9 отрезков длины 0,1 и 2 отрезка длины 0,05. Тогда из отрезков длин 0,05, 0,05 и 0,1 треугольник не сложишь. Пусть $a<0{,}1$. Проверим что $b+c>d$ для любых трех из отрезков деления. Кроме b и c есть еще 9 отрезков. Их общая длина $\le 9a<0{,}9$. Тогда $b+c>1–0{,}9=0{,}1>a\ge d$.

4. Шахматная фигура может сдвигаться на 8 или 9 клеток по горизонтали или вертикали. Запрещается ходить на одну и ту же клетку дважды. Какое наибольшее количество клеток может обойти эта фигура на доске 15×15 ? (Начать обход разрешается с любой клетки.

Ответ. 196 клеток

Решение. Занумеруем по порядку горизонтали и вертикали от 1 до 15. Назовем 8-ю горизонталь и вертикаль, а также клетки на них *плохими*, все остальные – *хорошими*. У нас есть всего 15+15–1=29 плохих клеток, остальные 225–29=196 клеток – хорошие. Заметим, что с плохой клетки можно пойти только на плохую, и обратно – на плохую можно попасть только с плохой. Поэтому, стаартовав с плохой клетки, больше 29 клеток не обойдешь.

Покажем, как обойти все хорошие клетки. Заметим, что все хорошие клетки одной вертикали можно обойти, стартовав с клетки 9-й горизонтали и прыгая с горизонтали на горизонталь в таком порядке 9-1-10-2-11-3-....-15-7. Можно и наоборот: стартовать с 7-й и прыгать в обратном порядке. Будем действовать так: обойдем все хорошие клетки одной вертикали, перепрыгнем на другую вертикаль, обойдем все хорошие клетки там, снова сменим вертикаль и.т.д. Чуть конкретнее: стартуем с 9 клетки 9-й вертикали, обходим вертикали по очереди в прямом и обратном порядке, а смену вертикалей делаем в указанном выше порядке. Так мы обойдем все 196 хороших клеток и закончим на 9-й клетке 7-й вертикали.

5. Есть 6 монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но ее вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за 3 взвешивания с помощью весов, показывающих общий вес взвешиваемых монет, найти фальшивую монету?

Решение. Решение опирается на следующее соображение. Пусть вес настоящей монеты x, а фальшивой $x+y$ (здесь $y\neq 0$, но может быть и отрицательным). Тогда средний вес монеты в группе из k монет будет либо x – если все настоящие, либо $x + y/k$ – если среди них есть фальшивая. Отсюда следует, что средние веса в непересекающихся группах равны только если в них нет фальшивой монеты; то же верно для групп разной численности, даже если они пересекаются.

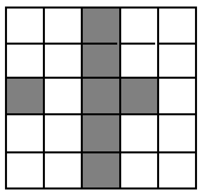
Обозначим монеты $ABCDEF$. Сделаем три взвешивания: пусть AB весит p, CD весит q, ACE весит r. Сравним средние веса в группах. Если все три равны, то все взвешенные монеты настоящие, значит фальшива F. Если $p/2=q/2\neq r/3$, то $ABCD$ – настоящие, а среди ACE есть фальшивая, то есть фальшива E. Аналогично в случае $p/2=r/3\neq q/2$ фальшива D, а в случае $q/2=r/3\neq p/2$ фальшива B. При трех разных средних фальшивая монета входит в тройку ACE и одну из взвешенных пар, но в которую? В ранее принятых обозначениях $r/3=x+y/3$, одно из остальных средних равно x, а другое $x + y/2$. Ясно, что $x + y/2$ ближе к $x + y/3$, чем x. Поэтому фальшивая монета в той паре, чей средний вес меньше отличается от среднего веса тройки. Если это пара AB, то фальшива A, в противном случае C.

Задачи, добавленные местным жюри

6. Последовательность чисел 7, 14, 17, 20, … строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Например, на втором месте стоит число 14, так как $7^2=49$, а $4+9+1=14$. На третьем месте стоит число $17=1+9+6+1$ и так далее. Какое число стоит на 2005-м месте?

Решение. Вычислим еще 5 членов последовательности: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8,... Заметим, что числа на 5-м и 8-м местах равны. Так как следующее число однозначно строится по предыдущему, то тогда 6-е число равен 9-му, 7-е – 10-му, 8-е – 11-му и т.д., то есть последовательность повторятся с периодом 3 начиная с 5-го места. Число шагов от 7-го места к 2005-му равно 1998. Оно делится на 3, значит, на 2005-м тоже стоит 11 – как и на 7-м.

7. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5×5 нужно закрасить, чтобы в любом квадратике 3×3, являющемся его частью, было ровно 4 закрашенных клетки? (Приведите пример раскраски и объясните, почему меньшим количество клеток обойтись нельзя).



Решение. Хватит 7 закрашенных клеток – см. рисунок. Меньшим числом обойтись нельзя. Рассмотрим два квадратика 3×3 в противоположных углах. У них только одна общая клетка – центральная. Если ее закрасить, то понадобится закрасить еще еще 6 клеток – по 3 в каждом квадратике, итого 7. Если центральную не закрашивать, то придется закрасить 4+4=8 клеток – еще больше. Значит, 7 – это минимум.

Вариант для старших (2, 3 год гимназии)

1. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами? Иными словами, имеет ли решение в натуральных числах неравенство $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$?

Решение. Нет. Для этого разность между крайними членами должна быть больше разности между средними, то есть $(n+1)^2 - n^2 > b^3 - a^3$ или $2n+1>(b-a)(b^2+ab+a^2)$. Заметим, однако, что $b-a \geq 1$, а $b^2+ab+a^2>3a^2$, то есть должно быть $2n+1>3a^2$. По условию $n^2 < a^3$, тем более $n^2 < a^4$, откуда $n< a^2$. Значит, $2n+1>3n$, откуда $n<1$, что противоречит условию.

2. Дан отрезок длины $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Можно ли построить циркулем и линейкой (на которой нет делений) отрезок длины 1?

Ответ: можно.

Решение. Возьмем какой-нибудь отрезок длины a. Будем строить отрезок AB длины $a\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$, складывая его из кусков. для этого сначала построим кусок длины $a\sqrt{2}$ как диагональ квадрата со стороной a, затем кусок длины $a\sqrt{3}$ как диагональ прямоугольника со сторонами a и $a\sqrt{2}$, и наконец, кусок длины $a\sqrt{5}$ как диагональ прямоугольника со сторонами a и $2a$.

Отложим теперь отрезок AC длины $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ так, чтобы C не лежала на прямой AB. На отрезке AB отметим точку D такую, что $AD = a$. Проведем прямую DE, параллельную BC (E лежит на AC). Из подобия треугольников ABC и ADE получим равенство отношений $AE/AD = AC/AB$, то есть $AE = AC\cdot AD/AB=1$, а значит AE – искомый отрезок.

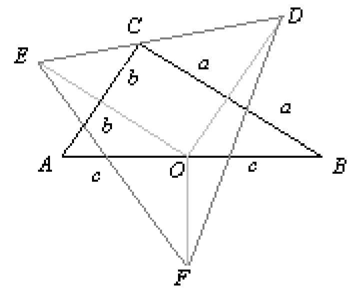
3. Есть 6 монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но ее вес, как и веснастоящей монеты, неизвестен). Как за 3 взвешивания с помощью весов, показывающих общий вес взвешиваемых монет, найти фальшивую монету?

Решение. См. задачу 5 для младших.

4. На сторонах прямоугольного треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты с центрами D,E, F. Докажите, что отношение площадей треугольников DEF и ABC

а) больше 1; `[2 балла]`

b) не меньше 2. `[2 балла]`



Решение. Заметим, что центры квадратов лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника ABC и удалены от соответствующей стороны на половину ее длины. Эти серединные перпендикуляры пересекаются в центре описанной окружности треугольника ABC, а именно в середине гипотенузы (см. рис). Итак, пусть C – вершина прямого угла, $2a$ и $2b$ – длины катетов, $2c$ – длина гипотенузы. Тогда площадь $S_{\Delta ABC}=2ab$.

а) $S_{\Delta DEF} > S_{\Delta DEO} = (a+b)^2/2$ – так как $\angle DOE$ – прямой, а $OD=OE=a+b$. Широко известно неравенство $(a+b)^2/2 \geq 2ab$ (равносильно тому, что разность $(a+b)^2/2-2ab=(a-b)^2/2 \geq 0$). Поэтому $S_{\Delta DEF} > S_{\Delta ABC}$ и отношение площадей $S_{\Delta DEF}/S_{\Delta ABC}>1$.

b) $S_{\Delta DEF} = S_{\Delta DEO} + S_{\Delta DOF} + S_{\Delta OEF} = ½(OD\cdot OE+ OD\cdot OF\cdot\sin\angle DOF + OE\cdot OF\cdot\sin\angle EOF) =$ $= ½((a+b)^2+ (a+b)\cdot c\cdot\sin\angle DOF + (a+b)\cdot c\cdot\sin\angle EOF)$. Заметим, что $\angle DOF = 90°+\angle DOB$, поэтому $c\cdot\sin\angle DOF = c\cdot\cos\angle DOB = b$. Аналогично, $c\cdot\sin\angle EOF = a$. Отсюда, $S_{\Delta DEF} = (a+b)^2 \geq 4ab \geq 2S_{\Delta ABC}$ и отношение площадей $S_{\Delta DEF}/S_{\Delta ABC}>2$.

5. На плоскости лежал куб. Его перекатили несколько раз (через ребра) так, что куб снова оказался наисходном месте той же гранью вверх. Могла ли при этом верхняя грань повернуться на 90° относительно своего начального положения?

Решение. Нет. Нанесем на плоскость клетчатую решетку так, чтоб куб закрыл ровно одну клетку. Раскрасим узлы решетки в черный и белый цвета в шахматном порядке. Раскрасим вершины куба в узлах в те же цвета, а вершины над ними – в противоположные. Видим, что концы каждого ребра – разного цвета. Заметим, что при перекатывании через ребро вершины всегда будут соприкачаться с узлами своего цвета, а вот при повороте на месте на 90° это свойство нарушается. Значит, указанного в задаче исходного положения достичь нельзя.

Задачи, добавленные местным жюри

6. Рассматриваются функции вида $y=x^2+ax+b$, где $a+b=2005$. Докажите, что графики всех таких функций имеют общую точку.

Решение. Все эти графики проходят через точку (1, 2006), поскольку при $x=1$ $y=1^2+a\cdot 1+b = 1+(a+b)=1+2005=2006$.

7. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5×5 нужно закрасить, чтобы в любом квадратике 3×3, являющемся его частью, было ровно 4 закрашенных клетки? (Приведите пример раскраски и объясните, почему меньшим количество клеток обойтись нельзя).

Решение. См. задачу 7 для младших.