27-й Международный математический Турнир городов
2005/06 учебный год, Израиль
Решения задач (Л.Э.Медников)

Осенний тур

Тренировочный вариант, 9-10 классы

1.1. [3] Дан тр-к ABC. Точки M_1, M_2, M_3 – середины сторон AB, BC и AC, а точки H_1, H_2, H_3 – основания высот, лежащие на тех же сторонах. Д/ч из отрезков H_1M_2, H_2M_3 и H_3M_1 можно построить тр-к.

Указанные отрезки равны половинам сторон тр-ка ABC. (Например, медиана H_1M_2 прямоугольного тр-ка BH_1C равна половине гипотенузы BC).

1.2. [3] В каждой вершине куба записано по числу. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трех соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После десяти таких операций в каждой вершине оказалось исходное число. Обязательно ли все исходные числа были одинаковы?

Нет. Раскрасим вершины в “шахматном” порядке, поместим в белые вершины единицы, а в черные – нули. После каждого четного шага расстановка чисел повторяется.

1.3. [4] Отрезок единичной длины разбили на 11 отрезков, длина каждого из которых не превосходит a. При каких значениях a можно утверждать, что из любых трех получившихся отрезков можно составить тр-к?

При $\frac{1}{11} \le a < \frac{1}{10}$. При этом сумма длин двух наименьших отрезков больше, чем $1 - 9\cdot 0{,}1 = 0{,}1 > a$, т.е. больше длины наибольшего отрезка.

Для $a \ge 0{,}1$ контрпример – разбиение на 9 отрезков длины 0,1 и два – длины 0,05.

1.4. [4] Шахматная фигура может сдвигаться на 8 или 9 клеток по горизонтали или вертикали. Запрещается ходить на одну и ту же клетку дважды. Какое наибольшее количество клеток может обойти эта фигура на доске 15×15?

196. В центральную клетку нельзя попасть ни с какой другой. В клетки центральной вертикали (горизонтали) можно попасть только с клеток этой вертикали, т.е., начав с такой клетки, фигура обойдет не более 14 клеток.

Оставшиеся $225 - 29 = 196$ клеток обойти можно. Например, начнем с клетки $g7$ и сделаем 13 ходов по вертикали (каждый раз возможен только один такой ход). В результате фигура обойдет всю вертикаль (кроме, разумеется, ее центральной клетки) и закончим на клетке $g9$. Теперь сделаем единственный возмож-ный ход – по горизонтали – на последнюю вертикаль, аналогично обойдем эту вертикаль, перейдем на вертикаль f и т.д.

1.5. [5] Есть 6 монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но ее вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за 3 взвешивания с помощью весов, показывающих общий вес взвешиваемых монет, найти фальшивую монету?

Взвесим сначала монеты 1 и 2 (пусть их вес $2a$), затем – 3 и 4 (пусть их вес $2b$). Разберем два случая.

1) $a = b$. Если вес монеты 5 равен a, то фальшивая монета – №6, в противном случае – №5.

2) $a \neq b$. Положим на весы монеты 1, 3 и 5. Если их вес равен $3a$, то фальшивая монета – №4, если $3b$ – №2, если $2a + b$ – №1, если $a + 2b$ – №3.

2-е решение. Пусть общий вес монет 1, 2, 3 равен $3a$, монет 1, 4 и 5 – $3b$; монет 2 и 4 – $2c$. В таблице показано соответствие между номерами фальшивых монет и результатами взвешиваний.

№ фальшивой монеты	
1	$a = b \neq c$
2	число b находится между a и c
3	$a \neq b = c$
4	число a находится между b и c
5	$a = c \neq b$
6	$a = b = c$

Тренировочный вариант, 11-12 классы

2.1. [3] Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами?

Нет. Пусть $n^2 < m^3 < (m + 1)+ < (n + 1)^2$. Тогда

$2n = (n + 1)^2 - n^2 - 1 > (m + 1)^3 - m^3 - 1 = 3m^2 + 3m \geq 6\sqrt{m^3} > 6n$. Противоречие.

2.2. [3] Дан отрезок длины $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Можно ли построить циркулем и линейкой (на которой нет делений) отрезок длины 1?

Можно. Возьмем отрезок длины $a = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Построим отрезок длины $b = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)a$. Любым стандартным способом построим отрезок длины $\frac{a^2}{b}$. Он и будет искомым.

2-е решение. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-5} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{30}}{12}$.

Имея отрезок длины a, можно построить отрезки длины $\sqrt{2}a$, $\sqrt{3}a$, $\sqrt{30}a$, а значит, и отрезок длины длины $\dfrac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

2.4. На сторонах прямоугольного тр-ка ABC построены во внешнюю сторону квадраты с центрами D, E, F. Д/ч отношение $S_{DEF} : S_{ABC}$ **а**) [2] больше 1; **б**) [2] не меньше 2.

б) Пусть угол A прямой, D, E, F – центры квадратов, построенных на сторонах AB, AC, BC. O – середина BC, K – точка пересечения AF и BC.

AF – хорда окружности с диаметром BC. $\angle BAF = \angle BCF = 45°$ $\Rightarrow$ $AF \perp DE$ $\Rightarrow$ $AF \parallel BD \parallel CE$. Опустим перпендикуляр OL на DE. $AF = 2OL$ $\Rightarrow$ $S_{DEF} = 2S_{DOE} \geq 2\, S_{DKE}$.

С другой стороны, $S_{ABC} = S_{DKE}$ (поскольку $S_{DKA} = S_{BKA}$ и $S_{EKA} = S_{CKA}$).

2-е решение. OL – средняя линия трапеции $BDEC$ $\Rightarrow$ $OL = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}} = DE$, и утверждение сводится к очевидному неравенству $\dfrac{(a+b)^2}{2} \geq ab$.

2.5. [5] На плоскости лежал куб. Его перекатили несколько раз (через ребра) так, что куб снова оказался на исходном месте той же гранью вверх. Могла ли при этом верхняя грань повернуться на 90° относительно своего начального положения?

Нет. Раскрасим вершины куба в “шахматном” порядке, а плоскость превратим в шахматную доску. При перекатывании с черной клетки на белую рисунок на верхней грани меняется, а при прекатывании с белой на черную – восстанавливается. Поэтому при “возвращении” верхняя грань может повернуться только на 180°.

Основной вариант, 9-10 классы

3.1. [3] Палиндром – это натуральное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево (например, 1, 343 и 2002 палиндромы, а 2005 – нет). Найдется ли 2005 пар вида (n, n +110), где оба числа – палиндромы?

Например, такими являются все числа вида 1099…901 при любом количестве девяток.

3.2. [5] Продолжения сторон AB и CD выпуклого 4-угольника $ABCD$ пересекаются в точке K. $AD = BC$, M и N – середины AB и CD. Д/ч тр-к MNK тупоугольный.

Пусть B и C ближе к точке K, чем A и D соответственно. Заметим, что AD и BC непараллельны. Поэтому либо $\angle KCB < \angle KDA$, либо $\angle KBC < \angle CAD$. Будем считать, что выполнено первое неравенство.

Рассмотрим пар-мм $BCDP$. По предположению точка P находится внутри тр-ка AKD. Тр-к ADP равнобедренный. Проведем в тр-ке BAD среднюю линию MQ. $MNDQ$ – пар-мм (стороны MQ и ND равны и параллельны). Но отрезок DQ, а значит и NM, перпендикулярен AP. Следовательно, угол NMK тупой.

2-е решение. **Лемма**. Если в тр-ках XYZ и $X_1Y_1Z_1$ $XY = X_1Y_1$ и $YZ = Y_1Z_1$, то

$$\angle XYZ < \angle X_1Y_1Z_1 \Leftrightarrow XZ < X_1Z_1.$$

Будем считать, что B и C ближе к K, чем A и D. Предположим,что оба угла KMN и KNM – не тупые. Применив лемму к тр-кам MNC и MND, получим $MC \leq MD$. Аналогич-но $NB \leq NA$.

Применив лемму к тр-кам BMC и AMD, получим $\angle MBC \leq \angle MAD$. Аналогично, $\angle NCB \leq \angle NDA$. Но это невозможно, поскольку $\angle MBC + \angle NCB > 180° > \angle MAD + \angle NDA$.

3.3. [6] На каждой клетке шахматной доски вначале стоит по ладье. Каждым ходом можно снять с доски ладью, которая бьет нечетное число ладей. Какое наибольшее число ладей можно снять? (Ладьи бьют друг друга, если они стоят в одном ряду и между ними нет других ладей).

59. Ни одну из ладей, стоящих в угловых клетках, снять нельзя. Действительно, в момент, когда снимают первую из них, ее бьют ровно две ладьи. Пусть можно оставить только 4 угловых ладьи. Тогда последнюю снятую ладью били либо две ладьи (если она стояла на границе доски), либо ни одной. Итак, хотя бы 5 ладей останутся.

Покажем, как снять 59 ладей. Сначала снимем с 8-й горизонтали все ладьи, кроме трех – a8, b8 и h8, затем повторим то же самое с 7-й, 6-й, …, 3-й и 1-й горизонталью. Теперь снимем с 1-й вертикали ладьи с a3 по a7, а с последней – с h3 по h7. Далее снимем ладьи b1 и a2. Осталось последовательно снять ладьи с b8 по b3 и с g2 по c2.

3.4. По краю многоугольного стола ползут два муравья. Все стороны стола длиннее 1 м, а расстояние между муравьями всегда ровно 10 см.
Сначала оба муравья находятся на одной из сторон стола.

а) [2] Стол выпуклый. Всегда ли муравьи смогут проползти по краю стола так, чтобы в каждой точке края побывал каждый из муравьев?

б) [4] Стол не обязательно выпуклый. Всегда ли муравьи смогут проползти по краю стола так, чтобы на краю не осталось точек, в которых не побывал ни один из муравьев?

а) Нет. Достаточно рассмотреть стол в виде равнобедренного тр-ка с высотой, меньшей 10 см. Если муравьи вначале находятся на основании, то правый никогда не попадет в нижнюю часть левого бедра.

б) Нет. Рассмотрим невыпуклый 4-угольник $ABCD$, полученный из равнобедренного тр-ка ABC вырезанием равнобедренного тр-ка ADC. Если AC и BD меньше 10 см, а изначально муравьи находятся на стороне AB, то ни один из них не попадет на сторону CD.

3.5. [7] Найти наибольшее натуральное число N, для которого уравнение
$99x + 100y + 101z = N$ имеет единственное решение в натуральных числах x, y, z.

5251. Из равенств $50 + 101 = 100$, $50\cdot 99 + 100 = 50\cdot 101$ и $51\cdot 99 = 100 + 49\cdot 101$ следует, что если (x, y, z) – решение, то $(x+1, y–2, z+1)$, $(x–1, y+2, z–1)$, $(x+50, y+1, z–50)$, $(x–50, y–1, z+50)$, $(x–51, y+1, z+49)$ и $(x+51, y–1, z–49)$ – также решения.

Пусть (x_0, y_0, z_0) – единственное решение в натуральных числах. Из вышесказанного следует, что $y_0 \le 2$, одно из чисел x_0, z_0 равно 1, $x_0 \le 51$, $z_0 \le 50$, а при $y_0 = 2$, $x_0 \le 50$, $z_0 \le 49$. Поэтому наибольшее N не превосходит

$$\max\{99 + 100 + 50\cdot 101,\ 99 + 200 + 49\cdot 101,\ 51\cdot 99 + 100 + 101,\ 50\cdot 99 + 200 + 101\} = \\ = 50\cdot 99 + 200 + 101 = 5251.$$

Покажем, что уравнение $99x + 100y + 101z = 5251$ действительно имеет единственное решение. Запишем его в виде $99(x + y + z) + y + 2z = 53\cdot 99 + 4$. Рассмотрим два случая.

1) $x + y + z \le 52$. Тогда $y + 2z \ge 103 \Rightarrow 2(x + y + z) = (y + 2z) + (2x + y) \ge 106$. Противоречие.

2) $x + y + z = 53$, $y + 2z = 4 \Rightarrow y = 2$, $z = 1 \Rightarrow x = 50$.

3.6. [8] У Карлсона есть 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем сотая часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съесть поровну варенья из любых 100 банок. Д/ч Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.

Будем считать, что все банки литровые, а общий объем варенья – 100 л. Распределение варенья по банкам назовем *хорошим*, если Карлсон может его съесть с соблюдением условия задачи. (По крайней мере одно хорошее распределение есть: в 100 банках по литру, остальные банки – пустые.)

Рассмотрим некоторое распределение P. Выделим непустую банку A с наименьшим количеством меда. Перельем мед из A в другую банку B (сколько туда влезет). Получится новое распределение Q. Д/ч если Q хорошее, то и P было хорошим. Будем считать, что мед в A “тяжелый” и опускается в B на дно. Рассмотрим два случая.

1) Банка A после переливания опустела. Рассмотрим алгоритм, опустошающий все банки при распределении Q. Почти во все дни Карсон ест из банки B мед только одного типа (легкий или тяжелый). Такое же количество меда он мог съесть и при распределении P (легкий из B, а тяжелый – из A). Если же в один из дней он съел мед сразу двух типов (b л легкого и a л тяжелого), то при распределении P ему просто нужно растянуть этот мед на 2 раза – в 1-й день съесть b л из B (и еще 99 банок), во 2-й – a л из А (и тех же 99 банок).

2) В банке A мед еще остался. Рассмотрим алгоритм, опустошающий все банки при распределении Q. Заметим, что **последовательность действий** Карлсона **значения не**

имеет. Поэтому можно считать, что сначала проводятся действия, в которых мед берется из банки A. При этом из банки B используется только легкий мед, поскольку его в B больше, чем оставшегося в A тяжелого меда. После того, как банка A опустеет, ситуация сводится к разобранной в случае 1.

Очевидно, что после некоторого количества переливаний весь мед будет сосредоточен в 100 банках. Поскольку это распределение хорошее, то по доказанному и все предыдущие (в частности, исходное распределение P) хорошие.

3.7*. [5] Сумма положительные чисел a, b, c равна 3. Д/ч $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$.

$a^2+2\sqrt{a} \geq 3\sqrt[3]{a^3} = 3a$. Отсюда $2\sqrt{a} \geq a(3-a) = a(b+c)$.

Прибавив два неравенства, полученные циклической заменой переменных, получим требуемое неравенство.

Замечание. Незнающие неравенство Коши для трех переменных могут получить то же самое, например, так: $a^2+a+2\sqrt{a} \geq 2a\sqrt{a}+2\sqrt{a} \geq 4\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = 4a$, или заметить, что

$$a^2-3a+2\sqrt{a} = \sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)^2\left(\sqrt{a}+2\right) \geq 0.$$

Основной вариант, 11-12 классы

4.1. [3] При каких n найдутся такие различные натуральные числа $a_1, a_2,..., a_n$, что сумма $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_1}$ – целое число?

При $n \neq 2$. При $n > 2$ положим $a_k = (n-1)^k$.

При $n = 2$ пусть $\frac{a_1}{a_2} = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь, где $q > p$. Тогда число

$\frac{p}{q}+\frac{q}{p} = \frac{p^2+q^2}{pq}$ не целое, поскольку p^2 не делится на q.

4.2. [2+3] См. 3.4.

4.3. [5] См. 3.3.

4.4. [6] На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Д/ч можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

Разобьём окружность на три произвольные дуги A, B и C. Пусть суммы чисел на дугах равны a, b и c. Можно считать, что $a \leq b \leq c$. Если $c-a > 1$, сдвинем границу между дугами A и C так, чтобы ровно одно число с C перешло на A. Пусть это число r. После нашей операции мы получили новые дуги A_1, B и C_1 с суммами $a_1 = a+r$, b, $c_1 = c-r$. Заметим, что каждая из разностей c_1-a_1, $b-a_1$, c_1-b меньше $c-a$, но больше –1, т.е. максимальная разность (ранее она равнялась $c-a$) уменьшилась по модулю. Если она все еще больше 1, повторим процедуру. Поскольку вариантов разбиения конечное число, эта разность не может постоянно уменьшаться и когда-нибудь станет меньше 1.

2-е решение. Пусть сумма всех чисел равна $3S$. Возьмем дугу A, сумма чисел на которой наиболее близка к S. Рассмотрим случай, когда она равна $S-\varepsilon$ ($\varepsilon \geq 0$; случай $S+\varepsilon$ рассматривается аналогично).

* Задача предлагалась только в Израиле.

Из дуг, **смежных с** A, сумма чисел на которых не меньше S, выберем дугу B, сумма чисел $S+\delta$ на которой наиболее близка к S. Тогда сумма чисел на оставшейся дуге равна $S-(\delta-\varepsilon)$ (очевидно, $\delta\ge\varepsilon$ и $\delta-\varepsilon\ge\varepsilon$). Максимальная разность между этими суммами равна $2\delta-\varepsilon$. Д/ч это разбиение искомое.

"Передадим" число r, находящееся на B и смежное с C из B в C. Мы получим дуги с суммами чисел $S-r+\delta$ и $S+r-\delta+\varepsilon$. По выбору дуги $S-r+\delta<S$ (иначе мы предпочли бы эту дугу дуге) $\Rightarrow$ $r-\delta>0$. По тем же причинам $S+r-\delta+\varepsilon\ge S+\delta$ $\Rightarrow$ $2\delta-\varepsilon\le r\le 1$.

4.5. [7] Дан тр-к ABC, AA_1, BB_1 и CC_1 – его биссектрисы. Величины углов A, B и C относятся как 4:2:1. Д/ч $A_1B_1=A_1C_1$.

Пусть углы A, B, C равны 4α, 2α, α $(7\alpha=\pi)$, I – точка пересечения биссектрис тр-ка ABC. $\angle AB_1I=2\alpha=\angle IAB_1$, $\angle CC_1A=\dfrac{5\alpha}{2}=\angle C_1IA$ $\Rightarrow$ $AC_1=AI=IB_1$.

$$\angle ABA_1=2\alpha=\angle BAA_1,\quad \angle BIA_1=3\alpha=\angle AIB_1\ \Rightarrow\ AA_1=BA_1=BI.$$

Отложим на луче BI отрезок $IK=IA_1$. Тогда $\angle KA_1I=\angle IKA_1=2\alpha$, $\angle BA_1K=\alpha=\angle KBA_1$ $\Rightarrow$ $KA_1=KB=BI-IK=AA_1-IA_1=AI=AC_1$, $B_1K=BI+IK=AI+IA_1=AA_1=BI$ $\Rightarrow$ тр-ки KA_1B_1 и AC_1A_1 равны по 2 сторонам и углу между ними $\Rightarrow$ $A_1B_1=A_1C_1$.

2-е решение. Рассмотрим правильный 7-угольник $ABXYZCT$. Из симметрии прямая AA_1 проходит через Y, BB_1 – через T (т.е. $YB_1\perp BC$), $BA_1=AA_1$ и $YA_1=CA_1$ $\Rightarrow$ при повороте на угол 3α вокруг точки A_1 B перейдёт в A, C – в точку Y, луч BA – в луч AC, а луч CC_1 – в луч YB_1 (угол между ними равен 3α) $\Rightarrow$ C_1 (точка пересечения BA и CC_1) перейдет в B_1 (точка пересечения AC и YB_1) $\Rightarrow$ отрезок A_1C_1 перейдет в отрезок A_1B_1.

3-е решение. Достаточно д-ть равенство тр-ков AA_1B_1 и BA_1C_1, для чего достаточно проверить равенство $AB_1=BC_1$. Выражая эти отрезки через стороны тр-ка ABC (см. *свойство биссектрисы*) сводим все к проверке равенства $b(a+b)=a(a+c)$, т.е. (*теорема синусов*) $\sin 2\alpha(\sin 4\alpha+\sin 2\alpha)=\sin 4\alpha(\sin 4\alpha+\sin\alpha)$. Но

$\sin 2\alpha(\sin 4\alpha+\sin 2\alpha)=2\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin\alpha$ и

$\sin 4\alpha(\sin 4\alpha+\sin\alpha)=\sin 3\alpha(\sin 3\alpha+\sin\alpha)=2\sin 3\alpha\sin 2\alpha\sin\alpha$.

Замечание. Равенство $b(a+b)=a(a+c)$ можно проверить и "без тригонометрии". Продолжим сторону CB за точку B на отрезок $BP=c$. Пусть прямая CA 2-й раз пересекает описанную окружность тр-ка ABP в точке Q. Тогда $\angle PAB=\angle APB=\alpha$ $\Rightarrow$ QB – биссектриса угла Q $\Rightarrow$ тр-к QBC равнобедренный: $BQ=BC=a$. Кроме того,
$\angle ABQ=\angle BAC-\angle QAC=3\alpha$ $\Rightarrow$ тр-к AQB равнобедренный: $AQ=BQ=a$. По *теореме о секущей* $CA\cdot CQ=CB\cdot CP$, т.е. $b(a+b)=a(a+c)$.

4.6. [8] На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа n и написать вместо них числа $n+1$ и $n-1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2005? (Сначала доска была чистой.)

$1342355520=\dfrac{2005^2+2003^2+2002^2+...+1^2+1^2}{2}$. При каждой операции сумма квадратов всех чисел увеличивается на 2. В частности, она всегда четна.

Пусть 2005 получено за минимальное количество операций. Предположим, что в этот момент на доске отсутствует натуральное число $n<2004$. Рассмотрим момент, когда n в последний раз было стёрто (очевидно, когда-то оно присутствовало). В этот момент появились числа $n+1$ и $n-1$, но далее ни одно из них не "использовалось" (иначе n снова бы появилось). Это *противоречит минимальности*: указанный "ход" оказался ненужным.

Итак, в последний момент на доске присутствуют числа 2005, 2003, 2002, …, 2, 1. Кроме них на доске должно присутствовать ещё хотя бы одно ненулевое число, поскольку сумма квадратов указанных чисел нечетна.

Следовательно, в последний момент сумма квадратов всех чисел не меньше $2005^2 + 2003^2 + 2002^2 + \ldots + 2^2 + 1 + 1$, а число ходов не меньше указанного в ответе.

Д/ч можно получить набор чисел, соответствующий ответу (т.е. 1, 1, 2, …, 2003, 2005 и некоторое количество нулей[*]).

Обозначим через (1) набор чисел, состоящий из одной или двух единиц и нескольких нулей. Назовем *сдвигом* последовательность операций, позволяющую из позиции (1), 2, 3, …, n получить позицию (1), 2, 3, …, $n-1$, $n+1$. Чтобы осуществить сдвиг, нужно из двух единиц (если (1) содержит одну единицу, добавим предварительно 2 единицы) получить двойку, затем из двух двоек – 3 и 1, из двух троек – 4 и 2…

Покажем теперь, как осуществить *расширение*: из позиуции (1), 2, 3, …, n, $n+2$ получить позицию (1), 2, 3, …, $n+1$, $n+3$.

Для этого сначала проведем $n-1$ сдвиг: превратим n в $n+1$, затем $n-1$ – в n, …, 2 – в 3. В результате получим позицию (1), 3, 4, …, $n+1$, $n+2$. Теперь превратим две единицы в двойку и проведем заключительный сдвиг.

За 5 ходов из пустой доски нетрудно получить позицию 0, 0, 1, 3, т.е. (1), 3. Применив к ней 2002 раза расширение, получим, наконец, позицию (1), 2, …, 2003, 2005.

4.7[**]. [6] Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a^{3/2}+ b^{3/2} + c^{3/2} + d^{3/2} = 4$. Д/ч

$$a + b + c + d \geq abc + bcd + cda + dab.$$

$3a + a^3 \geq 4\sqrt[4]{a^6} = 4a^{3/2}$. Отсюда $3a \geq a^{3/2}(4 - a^{3/2}) = a^{3/2}(b^{3/2} + c^{3/2} + d^{3/2})$.

Прибавив 3 неравенства, полученные циклической заменой переменных, получим неравенство $3(a + b + c + d) \geq 2(a^{3/2}b^{3/2} + a^{3/2}c^{3/2} + a^{3/2}d^{3/2} + b^{3/2}c^{3/2} + b^{3/2}d^{3/2} + c^{3/2}d^{3/2})$.

С другой стороны, $a^{3/2}b^{3/2} + a^{3/2}c^{3/2} + b^{3/2}c^{3/2} \geq 3\sqrt[3]{(abc)^3} = 3abc$. Отсюда

$$2(a^{3/2}b^{3/2} + a^{3/2}c^{3/2} + a^{3/2}d^{3/2} + b^{3/2}c^{3/2} + b^{3/2}d^{3/2} + c^{3/2}d^{3/2}) \geq 3(abc + bcd + cda + dab).$$

[*] Количество нулей можно указать точно, так как сумма всех чисел на доске всегда равна их количеству.

[**] Задача предлагалась только в Израиле.