ДВАДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Решения задач написали Л.Медников, А.Шаповалов

Весенний тур, тренировочный вариант

M1. [3 балла] Одновременно из деревень *А* и *Б* навстречу друг другу вышли Аня и Боря (их скорости постоянны, но не обязательно одинаковы). Если бы Аня вышла на 30 минут раньше, то они встретились бы на 2 километра ближе к деревне *Б*. Если бы Боря вышел на 30 минут раньше, то встреча состоялась бы ближе к деревне *А*. На сколько? *(Д.Калинин)*

Ответ.. На 2 километра.

Решение. Пусть вышли не двое, а четверо: кроме *A*(Ани) и *B*(Бори) на полчаса раньше стартовали их двойники *a* и *b*. Соответственно, случилось 4 встречи: *ab*, *aB*, *Ab* и *AB*. Мы знаем, что от места *aB* до *AB* 2 км. Ясно, что *ab* была там же, где *AB*, но на 30 минут раньше. Поэтому от места *aB* до *ab* те же 2 км. Поскольку, однако, *b* и *B* идут с одинаковыми постоянными скоростями, то интервал (по времени и расстоянию) между ними одинаковый. Идущие навстречу а и А преодолевают этот интервал за одинаковое время, поскольку их скорости сближения с В одинаковы. А поскольку скорости а и А одинаковы, то и расстояние они при этом проходят одинаковое. Значит, от места Ab до *AB* тоже 2 км, что и требовалось.

M2. [4 балла] Пусть *N* - любое натуральное число. Докажите, что в десятичной записи либо числа *N*, либо числа 3*N* найдется одна из цифр 1, 2, 9. *(Г.Гальперин)*

Решение. Если в 3*N* больше цифр, чем в *N*, то 3*N* начианается на 1 или 2. Если меньше, то *N* начинается на 1,2 (уже хорошо!) или 3. Но в последнем случае 3*N* начинается на 9.

M3. [5 баллов] В первом ряду шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а в последнем ряду – 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, по одному ферзю за ход. Ферзь ходит по вертикали, горизонтали или диагонали на любое число клеток (если на его пути нет других ферзей). *(С.Токарев)*

Ответ. За 23 хода.

Решение. *Оценка.* Из пары ферзей на одной не крайней вертикали тот, кто сходит раньше, должен сделать минимум два хода; 6 таких пар затратят не менее 18 ходов. Из четверки угловых ферзей тот, кто сходит первым, тоже должен сделать минимум два хода, итого еще 5 ходов.

Пример на 23 хода можно построить, например, так: белых ферзей из 4 центральных вертикалей и черных ферзей из 4 крайних вертикалей передвинуть в центрально-симметричные клетки, а остальных ферзи – в противоположные клетки той же вертикали (при этом белым придется сделать 12 передвижений, а черным – только 11, так как одного из угловых ферзей они смогут передвинуть за 1 ход). Подберите сами нужный порядок ходов.

M4. [5 баллов] Дан квадрат *ABCD*, *M* и *N* - середины сторон *BC* и *AD* соответственно. На продолжении диагонали *AC* за точку *A* взяли точку *K*. Отрезок *KM* пересекает сторону *AB* в точке *L*. Докажите, что углы *KNA* и *LNA* равны. *(А.Акопян)*

Решение. Пусть прямая *AB* пересекает отрезок *KN* в точке *T*. Заметим, что *KC* пересекает отрезок *MN* в середине. Поскольку *LT* параллелен *MN*, то по теореме Фалеса *KC* пересекает его тоже в середине. Прямоугольные треугольники *ANT* и *ANL* равны по двум катетам. Отсюда $\angle LNA=\angle TNA=\angle KNA$.

M5. [5 баллов] В некотором городе каждая улица идет либо с севера на юг, либо с востока на запад. Автомобилист совершил прогулку по этому городу, сделав ровно сто поворотов налево. Сколько поворотов направо он мог сделать при этом, если никакое место он не проезжал дважды и в конце вернулся назад? *(Р.Женодаров)*

Комментарий. В городе нет развязок – мостов и туннелей. Автомобилист стартовал не с перекрестка.

Решение. Автомобилист совершил прогулку по контуру несамопересекающегося многоугольника, тем самым он сделал ровно один оборот вокруг своей оси. Каждый поворот был на четверть оборота в ту или другую сторону. Сумма поворотов налево отличается от суммы поворотов направо на один оборот, то есть на 4 поворота. Значит, если автомобилист сделал полный оборот против часовой стрелки, он сдела 96 правых поворотов, если по часовой – то 104 правых поворота.

C1. [3 балла] На координатной плоскости нарисованы 4 графика функций вида $y=x^2+ax+b$, где a, b - числовые коэффициенты. Известно, что есть ровно 4 точки пересечения, причем в каждой пересекаются ровно два графика. Докажите, что сумма наибольшей и наименьшей из абсцисс точек пересечения равна сумме двух других абсцисс. *(А.Шаповалов)*

Решение. Заметим, что графики $y=x^2+ax+b$ и $y=x^2+cx+d$ пересекаются $\Leftrightarrow$ графики $y=ax+b$ и $y=cx+d$ пересекаются, причем абсциссы точек пересечения одни и те же (это следует из равносильности уравнений $x^2+ax+b=x^2+cx+d$ и $ax+b=cx+d$). Заменим теперь каждый график вида $y=x^2+ax+b$ на график $y=ax+b$ с теми же a и b. Условия насчет пересечений сохранятся, однако вместо парабол у нас теперь прямые! Легко видеть, что 4 точки могут получиться только у двух пар параллельных прямых. Точки пересечения лежат в вершинах параллелограмма. Наибольшая и наименьшая абсцисса – у пары противоположных вершин (у нас нет прямых параллельных оси y). Полусумма абсцисс пары противоположных вершин равна абсциссе центра параллелограмма. Поэтому полусуммы, а, значит, и суммы, равны между собой.

С**2.** Все натуральные числа выписали подряд без промежутков на бесконечную ленту: 123456789101112... Затем ленту разрезали на полоски по 7 цифр в каждой. Докажите, что любое семизначное число

а) [3 балла] встретится хотя бы на одной из полосок;

б) [1 балл] встретится на бесконечном числе полосок. *(Г.Гальперин)*

Решение. **а)** Покажем на примере числа 2005312 (общий случай ничем не отличается). Рассмотрим кусок ленты *20053120200531212005312*2... *2005312*6 (7 групп по 8 цифр). В каждой группе есть как минимум один разрез. Если в первой группе слева от разреза окажется $k<7$ цифр, то в следующей $k-1$ цифра и т.д. Значит, из группы *2005312k* разрезы вырежут как раз число 2005312.

б) Кусок *20053120200531212005312*2... *2005312*6 встретится на ленте бесконечно много раз как начало длинных чисел. И каждый раз мы вырежем из него нужную полоску.

C3. [4 балла] См. Младшие, задача 4.

C4. [4 балла] См. Младшие, задача 5.

C5. Сумма нескольких положительных чисел S=10, а сумма квадратов этих чисел Q>20. Докажите, что сумма кубов этих чисел K>40. *(А.Толпыго)*

Решение. Покажем, что $K\cdot S\geq Q^2$. Если рассмотреть разность $K\cdot S-Q^2$, то четвертые степени взамно уничтожатся, и для каждой пары чисел x и y останутся только такие члены: $x^3y+xy^3-2x^2y^2$. А эта сумма преобразуется к виду $xy(x-y)^2\geq 0$. Неравенство доказано. Теперь $K\cdot 10\geq Q^2>20^2=400$, откуда $K>40$.

Весенний тур, основной вариант

М1. На графике квадратного трехчлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс. *(Е.Горский)*

Решение. Перенесем систему координат так, чтобы ее начало совпало с левой из отмеченных точек. Тогда формула квадратного трехчлена примет вид $y=ax^2+bx$, где a и b – целые. Отмечны точки с координатами (0, 0) и (m, am^2+bm), где m – целое. Расстояние между этими точками $\sqrt{m^2+\left(am^2+bm\right)^2}=\sqrt{m^2+m^2\left(am+b\right)^2}=m\sqrt{1+\left(am+b\right)^2}$ по условию целое, поэтому корень – число рациональное, а, значит, и целое. Поскольку число вида $1+N^2$ является полным квадратом только при $N=0$, то $am+b=0$. Но тогда и $am^2+bm=0$, то есть вторая точка тоже лежит на оси абсцисс, что равносильно утверждению задачи.

М2. Высоты AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y – середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые XY и $A'B'$ перпендикулярны. *(А.Заславский)*

Решение. Так как AA' и BB' – высоты, треугольники $AA'B$, $AB'B$, $CA'H$ и $CB'H$ – прямоугольные. Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна его половине, $XA'=AB/2=XB'$, и $YA'=CH/2=YB'$. Следовательно, точки X и Y лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $A'B'$.

М3. На циферблате правильно идущих часов барона Мюнхгаузена есть только часовая, минутная и секундная стрелки, а все цифры и деления стерты. Барон утверждает, что может определять время по этим часам, поскольку, по его наблюдению, на них в течение дня (с 8-00 до 19-59) не повторяется два раза одно и то же расположение стрелок. Верно ли наблюдение барона? (Стрелки имеют различную длину, движутся равномерно.) *(А.Акопян)*

Ответ.. Верно.

Решение. Допустим, что в течение дня на часах повторилось одно и то же расположение стрелок. Пусть между этими моментами прошло время t (где t меньше 12 часов). Тогда ясно, что в любой момент времени расположение стрелок такое же, как и спустя время t. Но в 12 часов все три стрелки совпадают, значит и спустя время t все три стрелки совпадают. Но три стрелки могут совпадать только один раз в день – в 12 часов (докажите это).

М4. Клетчатый бумажный прямоугольник 10×12 согнули несколько раз по линиям клеток так, что получился квадратик 1×1. Сколько частей могло получиться после того, как этот квадратик разрезали по отрезку, соединяющему

а) середины двух его противоположных сторон;

b) середины двух его соседних сторон?

(Найдите все ответы и докажите, что других нет.) *(С.Зайцев)*

Ответы.. **а)** 11 или 13. **b)** 31, 36, 37 или 43.

Решения. **а)** Пусть разрез проходил вертикально. Проведем во всех квадратиках вертикальные отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Заметим, что при сгибании по линиям клеток эти отрезки накладываются друг на друга. Следовательно, при разрезании разрезаются они и только они. Считая число получающихся при этом частей, получаем либо 11, либо 13.

b) Заметим, что в каждом квадратике будет сделан ровно один разрез. От каждого квадратика будет отрезан треугольничек с одной из вершин, причем эта же вершина будет отрезана во всех квадратиках, которым она принадлежит. Отрезанные вершины расположены в виде правильной сетки на расстоянии 2 друг от друга (подумайте, почему). Каждая отрезанная вершина попадет в отдельный «ромбик» или «треугольничек», а еще останется один связный кусок в виде «дырявого ковра».

Рассмотрим верхний левый квадратик. В нем можно отрезать любую из вершин, после чего сетка отрезанных вершин однозначно определяется. Она расположена на 5 либо на 6 горизонталях и на 6 либо на 7 вертикалях, поэтому на ней может быть 5×6, 5×7, 6×6 или 6×7 вершин. Соответственно, число кусков в каждом случае на 1 больше, откуда ответ.

Замечание. Полезно нарисовать картинку разрезов для всех 4 случаев.

М5. Конструктор состоит из набора прямоугольных параллелепипедов. Все их можно поместить в одну коробку, также имеющую форму прямоугольного параллелепипеда. В бракованном наборе у каждого параллелепипеда одно из ребер оказалось меньше стандартного. Можно ли утверждать, что у коробки, в которую складывается набор, тоже можно уменьшить одно из ребер? (Параллелепипеды укладываются в коробку так, что их ребра параллельны ребрам коробки.) *(С.Волченков)*

Ответ.. Нет, не всегда..

Решение. Опишем самый простой из возможных контрпримеров. Пусть в коробку $2\times3\times4$ помещены два бруска $1\times3\times4$. Пусть 4 – это высота, 3 – ширина, 1 и 2 – толщина. Уменьшим у одного бруска высоту до 3,9, а у другого – ширину до 2,9. Так как у второго бруска высота 4, то высоту коробки уменьшить нельзя. Так как высоты обоих брусков больше 3, их можно ставить в коробку только вертикально. Так как ширина каждого брусков больше толщины коробки, повернуть их тоже нельзя. Ну а сумма толщин брусков 1+1=2 – как раз толщина коробки.

Развитие. Выясните самостоятельно, изменится ли ответ в задаче, если у каждого бруска уменьшаются два измерения из трех?

М6. Фома и Ерема делят кучу из 25 монет в 1, 2, 3, ... , 25 алтынов. На каждом ходу один из них выбирает монету из кучи, а другой говорит, кому ее отдать. Первый раз выбирает Фома, далее тот, у кого сейчас больше алтынов, при равенстве тот же, кто в прошлый раз. Может ли Фома действовать так, чтобы в итоге обязательно получить больше алтынов, чем Ерема, или Ерема всегда сможет Фоме помешать? *(А.Шаповалов)*

Ответ. Больше денег сможет получить Ерема.

Решение. Заметим сначала, что в этой игре не может быть ничьей (так как общая сумма денег нечетна). Это значит, что у кого-то из игроков есть выигрышная стратегия (докажите!). Допустим, что у Фомы есть выигрышная стратегия. Пусть Фома сделал первый ход. Тогда на любой ход Еремы Фома сможет ответить так, чтобы в дальнейшем выиграть. Но если Ерема ответит, что деньги нужно отдать Ереме, то он окажется точно в такой же ситуации, в которой оказался бы Фома, если бы Ерема ответил "монету отдать Фоме" (и Фома при этом знал бы, как выиграть). Значит, Ерема может воспользоваться этой стратегией Фомы и выиграть –

противоречие. Значит у Фомы выигрышной стратегии нет. Значит выигрышная стратегия есть у Еремы.

М7. Клетки шахматной доски 8×8 занумерованы от 1 до 64 по диагоналям влево вниз (см. рис.). Петя расставил на доске 8 фишек так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось по одной фишке. Затем он переставил фишки так, чтобы каждая фишка попала на клетку с бо́льшим номером. Могло ли по-прежнему в каждой строке и в каждом столбце оказаться по одной фишке? *(Б.Френкин)*

1	2	4	7	11	16		
3	5	8	12	17			
6	9	13	18				
10	14	19					
15							
							59
						60	62
				58	61	63	64

Ответ. Нет, не могло.

Решение. Сопоставим каждой фишке ее "координаты" на шахматной доске: фишка, стоящая в n-ом слева столбце и в m-ой снизу строке имеет координаты (n,m). Вычислим у каждой фишки разность ее координат $n–m$ и сложим все эти разности. Получится 0, поскольку сумма первых координат всех фишек равна 1+2+...+8 (так как в каждом столбце ровно одна фишка), и сумма вторых координат всех фишек равна 1+2+...+8 (так как в каждой строке ровно одна фишка). Сумма разностей должна быть равна 0 и для любой другой расстановки, когда в каждой строке и каждом столбце ровно по одной фишке.

Если при перестановке фишка попала на клетку с большим номером, то она либо сдвинулась вниз в своей диагонали, либо перебралась на одну из следующих (вправо вниз) диагоналей. Можно тогда сказать, что фишка сдвигается так: либо остается в своей диагонали и сдвигается по ней вниз, либо сдвигается на несколько клеток вправо, после чего двигается как угодно на той диагонали, куда она попала. Посмотрим, что происходит при этом с разностью координат фишки. В одной диагонали разность координат постоянна. Поэтому разность координат фишки либо не изменится (если фишка не меняла диагональ), либо увеличится (если меняла). Самая нижняя фишка должна была поменять диагональ, поэтому сумма разностей увеличилась и стала больше 0. Значит, теперь уже не может быть в каждой строке и каждом столбце ровно по одной фишке.

С1. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс. *(Е.Горский)*

Решение. Перенесем систему координат так, чтобы ее начало совпало с одной из отмеченных точек. Заметим, что данный график все равно останется графиком многочлена с целыми коэффициентами $y=P(x)$. Поскольку, однако, $P(0)=0$, то свободного члена нет, поэтому $P(x)=xQ(x)$, где $Q(x)$ – тоже многочлен с целыми коэффициентами. Пусть t – абсцисса второй отмеченной точки, тогда ее координаты $(t, P(t))$. Расстояние до начала координат $\sqrt{t^2+\left(P(t)\right)^2}=\sqrt{t^2+t^2\left(Q(t)\right)^2}=|t|\sqrt{1+\left(Q(t)\right)^2}$ по условию целое, поэтому корень – число рациональное, а, значит, и целое. Поскольку число вида $1+N^2$ является полным квадратом только при $N=0$, то $Q(t)=0$. Но тогда и $P(t)=0$, то есть вторая точка тоже лежит на оси абсцисс, что равносильно утверждению задачи.

С2. Окружность W_1 проходит через центр окружности W_2. Из точки C на W_1 проведены два луча, касающиеся W_2 и вторично пересекающие W_1 в точках A и B. Докажите, что отрезок AB перпендикулярен прямой, проходящей через центры окружностей. *(А.Заславский)*

Решение. Пусть O – центр окружности W_2. O лежит на биссектрисе угла между касательными, то есть угол OCA = углу OCB. Так как эти углы вписаны в окружность W_1, то равны ее дуги AO и OB. Поэтому и стягивающие их хорды AO и OB равны. Следовательно, точки A и B симметричны друг другу относительно линии центров, поэтому соединяющий их отрезок перпендикулярен линии центров.

С3. См. задачу М6.

С4. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что для любого целого положительного n уравнение $f(f(...f(x)))=0$ (n букв "f") имеет ровно 2^n различных действительных корней? *(А.Толпыго)*

Ответ: да, существует.

Решение. Докажем например, что многочлен $f(x) = 2x^2–1$ удовлетворяет условию. Заметим, что если для некоторого c значение $f(c)$ лежит между –1 и 1, то и само число c лежит между –1 и 1 (так как $–1<2x^2–1<1$ ⎧ $0<x^2<1 \Rightarrow –1<x<1$). Введем обозначения:
$f_n(x)= f(f(...f(x)))$ (n букв "f"). Ясно, что $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$. Докажем индукцией по n следующее утверждение: если $–1<c<1$, то уравнение $f_n(x)=c$ имеет ровно 2^n различных корней на интервале $(–1,1)$. База ($n=1$) очевидна (например, из графика). Пусть утверждение доказано для $n=k$, докажем его для $n=k+1$. Уравнение $f_{k+1}(x)=c$, где $–1<c<1$, равносильно уравнению $f(f_k(x))=c$, которое,

очевидно, равносильно совокупности уравнений $f_k(x)=a$ или $f_k(x)=b$, где $-1<a<1$ и $-1<b<1$ – корни уравнения $f(x)=c$. Каждое из этих уравнений имеет, по индукции, ровно 2^k различных корней из интервала (–1,1). Наборы корней не пересекаются, поскольку $f_k(x)$ принимает разные значения на корнях из разных наборов. Значит, уравнение $f_{k+1}(x)=c$ имеет ровно $2^k+2^k=2^{k+1}$ различных корней из интервала (–1;1), что и требовалось доказать. Осталось заметить, что поскольку степень многочлена $f_n(x)$ равна 2^n, то у него не более 2^n корней, а по доказанному выше у него не менее 2^n корней, значит, ровно 2^n корней.

С5. Икосаэдр и додекаэдр вписаны в одну и ту же сферу. Докажите, что тогда они описаны вокруг одной и той же сферы. (Напомним, что у икосаэдра 20 одинаковых граней в виде правильного треугольника, в каждой вершине сходится 5 граней, углы между соседними гранями одинаковы; у додекаэдра 12 одинаковых граней в виде правильного пятиугольника, в каждой вершине сходится 3 грани, углы между соседними гранями одинаковы.) *(Г.Гальперин)*

Набросок решения. Поскольку икосаэдр и додекаэдр двойствены, можно вписать их в одну сферу так, чтобы радиусы к вершинам одного проходили через центры граней другого и наоборот. Рассмотрим равнобедренный треугольник OAB, образованный двумя радиусами: OA проходит через центр грани додекаэдра, OB идет к вершине этой грани. Радиус OA перпендикулярен грани, поэтому грань пересекает треугольник OAB по его высоте BH. Ясно, что OH – радиус вписанной в додекаэдр сферы. В силу двойственности, OB проходит через центр грани икосаэдра, OA идет к вершине этой грани, грань пересекает треугольник OAB по его высоте AK и OK – радиус вписанной в икосаэдр сферы. Ну, а OH=OK, поскольку треугольник OAB – равнобедренный.

С6. Пусть *A* – угловая клетка шахматной доски 8×8, *B* – соседняя с ней по диагонали клетка. Докажите, что число способов обойти всю доску "хромой ладьей", начиная с клетки *A*, больше, чем число способов обойти всю доску "хромой ладьей", начиная с клетки *B*. ("Хромая ладья" ходит по доске на одну клетку по вертикали или горизонтали. Ладья должна побывать на каждой клетке доски ровно один раз.) *(И.Богданов)*

Решение. Идея решения состоит в следующем. Каждому способу обойти доску хромой ладьей, начиная с клетки *B*, надо сопоставить способ обойти доску хромой ладьей, начиная с клетки *A* (при этом разным способам должны соответствовать разные). Тогда вторых способов будет не меньше, чем первых. Чтобы доказать, что вторых больше, надо будет предъявить способ обойти доску хромой ладьей, начиная с клетки *A*, который не сопоставлен никакому способу обойти доску хромой ладьей, начиная с клетки *B*. Реализовать идею можно например так. Далее способы обхода доски хромой ладьей будем называть путями. Заметим сначала, что путей, начинающихся на клетке *A* и заканчивающихся на клетке *B* столько же, сколько путей, путей, начинающихся на клетке *B* и заканчивающихся на клетке *A*. Поэтому такие пути рассматривать далее не будем. Обозначим клетки обычной шахматной нумерацией: занумеруем столбцы доски буквами *abcdefgh* слева направо, строки – цифрами от 1 до 8 снизу вверх, а клетки – парами буква-цифра. Пусть клетка *A* будет *a*1, а клетка *B* – номер *b*2. Рассмотрим пути из *b*2. Вторая клетка такого пути – либо *a*2, либо *b*3, либо *c*2, либо *b*1. Разберем только первые два случая (остальные аналогичны). Если вторая клетка пути – *a*2 (и путь не заканчивается на клетке *a*1), то его начало выглядит так: *b*2*a*2*a*1*b*1*c*1 ... . Сопоставим такому пути путь *a*1*a*2*b*2*b*1*c*1... (после клетки *c*1 пути совпадают). Если вторая клетка пути – *b*3 (и путь не заканчивается на клетке *a*1), то возможны несколько вариантов. Далее мы их все разбираем и для каждого указываем, какой ему сопоставляется путь с началом в *a*1 (троеточиями обозначаются одинаковые участки путей).

1) Пути *b*2*b*3…*c*1*b*1*a*1*a*2 сопоставляем путь *a*1*a*2*b*2*b*3…*c*1*b*1.
2) Пути *b*2*b*3... *a*3*a*2*a*1*b*1 сопоставляем путь *a*1*b*1*b*2*b*3... *a*3*a*2.
3) Пути *b*2*b*3… *a*3*a*2*a*1*b*1*c*1 ... сопоставляем путь *a*1*a*2*a*3…*b*3*b*2*b*1*c*1....
4) Пути *b*2*b*3…*c*1*b*1*a*1*a*2*a*3 ... сопоставляем путь *a*1*b*1*c*1... *b*3*b*2*a*2*a*3....

Тем самым нужное сопоставление построено. Осталось заметить, что путь, начинающийся с клетки *A* и обходящий доску "по спирали", не сопоставляется никакому пути, начинающемуся с клетки *B*.

С7. В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причем отрезки не пересекаются друг с другом. Каждый отрезок покрашен в один из *K* цветов. Петя хочет покрасить в один из тех же цветов каждую точку так, чтобы не нашлось двух точек и отрезка между ними, окрашенных в один цвет. Всегда ли Пете это удастся, если

a) K=7;

b) K=10? *(С.Конягин)*

Решения. а). Докажем по индукции следующее утверждение: если число цветов n, а число точек не меньше 2^n, то существует раскраска отрезков, при которой Петя не может достигнуть цели. При n=1 утверждение очевидно. Пусть оно доказано для n–1 цвета, докажем его для n. Разобьем точки на два множества, состоящие не менее, чем из 2^{n-1} точек каждое. В каждом из множеств покрасим отрезки в n–1 цвет в соответствии с индуктивным предположением. Все отрезки, соединяющие точки из разных множеств, покрасим оставшимся цветом. Пусть Петя как-то покрасил все точки. Если в каком-то из двух множеств нет точек, покрашенных в последний цвет, то искомый отрезок существует по предположению индукции. Если же в обоих множествах есть точки последнего цвета, то соединяющий их отрезок – искомый.

b). Докажем, что отрезки, соединяющие 121 точку, можно покрасить таким образом, что Петя не сможет достигнуть цели. Занумеруем точки парами чисел (a, b), где а и b – числа от 1 до 11. При k=0, ... ,9 отрезки между точками вида (a_1, b_1) и (a_2, b_2), где $(a_2 - a_1) - k(b_2 - b_1)$ делится на 11, покрасим цветом k+1. Выберем произвольный цвет. Если две точки соединены с третьей отрезками этого цвета, то между собой они соединены отрезком того же цвета. Таким образом, точки разбиваются на несколько множеств так, что все отрезки между точками из одного множества покрашены в выбранный цвет. При этом для любых a_1, b_1, b_2 (при $b_2 \neq b_1$) существует ровно одно a_2 такое, что отрезок между (a_1, b_1) и (a_2, b_2) покрашен в данный цвет. Поэтому для каждого цвета точки разбиваются на 11 множеств по 11 точек в каждом. Теперь покрасим оставшиеся отрезки произвольным образом. Как бы Петя ни покрасил точки, найдутся 12 точек одного цвета. Рассмотрим разбиение на 11 множеств, соответствующее этому цвету. Найдутся две точки, попавшие в одно множество. Соединяющий их отрезок – искомый. В задаче дано 200 точек. Выберем из них 121, и, как бы ни действовал Петя, уже среди них найдется искомый отрезок.