



V турнир математических боёв  
ФПМИ МФТИ

Долгопрудный. 24-25 апреля 2021г.

---

**Финал**

1. Пусть  $f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$ . Найдите интеграл:

$$\int_0^1 f(1/x) dx.$$

2. Найдите все тройки  $(a, b, c)$  натуральных чисел, для которых числа  $a^2 + 2b + c$ ,  $b^2 + 2c + a$  и  $c^2 + 2a + b$  являются точными квадратами.

3. Аддитивная группа поля  $F$  изоморфна аддитивной группе поля  $G$ , и то же верно для мультипликативных групп. Обязательно ли поля изоморфны?

4. Существуют ли рациональные числа  $a_0, a_1, a_2, \dots$  такие, что при любом целом  $x$  ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  сходится и его сумма равна  $2^x$ ?

5. Обозначим через  $f(n)$  количество перестановок на  $n$  элементах без циклов длины 1 и 2. Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n!}$ .

6. Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . На продолжении стороны  $AB$  за точку  $B$  выбрана точка  $D$ . Эллипс с фокусами  $C$  и  $D$ , проходящий через вершину  $B$ , пересекает ветвь гиперболы с фокусами  $C$  и  $D$ , проходящую через вершину  $A$ , в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что точки  $P, Q$  и  $I$  лежат на одной прямой.