



V турнир математических боёв
ФПМИ МФТИ

Долгопрудный. 24-25 апреля 2021г.

Второй бой

1. Бесконечное подмножество M действительной прямой таково, что для любого $x \in \mathbb{R}$ хотя бы одно из множеств $M \cap (x, +\infty)$ и $M \cap (-\infty, x)$ счётное. Обязательно ли M счётно?

2. Дано натуральное число a , не являющееся точным кубом. Натуральные числа x, y, z таковы, что

$$(xz + 1)(yz + 1) = az^3 + 1.$$

Докажите, что $z \leq a^2 + 2a$.

3. Для каких натуральных n существует такая квадратная матрица A размера $n \times n$ с рациональными коэффициентами, что $A^3 + 6A^2 - 2I = 0$?

4. Каким наименьшим количеством правильных шестиугольников со стороной $\frac{1}{\sqrt{3}}$, у каждого из которых есть вертикальная сторона, можно покрыть правильный треугольник со стороной n , у которого есть горизонтальная сторона?

5. Для целых $n \geq m \geq 0$ докажите тождество

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j C_{n+1}^j 2^{m-j} = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_{n-m+j}^j.$$

6. Докажите, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx^3 dx \geq 0$$

при любых положительных a и b .