XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
X Южный математический турнир.
Старт-лига. 5 тур. 2 октября 2015 года.
<u>Высшая лига.</u> <u>Финал и бой за 3-е место.</u> Решения.

1. Даны три бесконечные десятичные дроби, получающиеся друг из друга переносом запятой. Цифра справа от запятой во всех числах разная. Может ли сумма этих чисел быть равной 777? (*А.Шаповалов*)

<u>Решение.</u> Может. Пусть x=777/1011=0,**7**685…. Тогда достаточно взять x, 10x =7,**6**85…. и 1000x =768,**5**….

2. Сумма 2k различных натуральных слагаемых равна $6k^2$. Докажите, что можно подчеркнуть несколько слагаемых (не менее двух) так, чтобы сумма подчеркнутых чисел делилась на одно из них. (*А.Шаповалов*)

Решение не публикуется, так как ни одна команда задачу не решила.

3. У правильного 100-угольника выбрали 51 вершину. Докажите, что какие-то три выбранные точки являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника. (*Польша, OMG, 2014*).

<u>Решение.</u> Разобьем все вершины на четверки, так чтобы между соседними вершинами в четверке было ровно по 25 сторон. Вершины каждой четвёрки – это вершины квадрата. Получится 25 четвёрок. По прицепу Дирихле в какой-то четвёрке отмечены не менее трёх точек. Они и лежат в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника.

4. Верно ли, что любой выпуклый многоугольник можно по прямой разрезать на два меньших многоугольника с равными периметрами и равными наименьшими сторонами? (*А.Шаповалов*)

Решение не публикуется, так как ни одна команда задачу не решила.

5. В центральной клетке нижнего ряда доски 2×2015 лежат 2015 зёрен, остальные клетки – пустые. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход можно переложить с клетки одно или несколько зёрен (но не все) в соседнюю пустую. Кто не сможет сделать хода – проиграл. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник? (*А.Шаповалов*)

Решение не публикуется, так как ни одна команда задачу не решила.

6. В каждой передаче «Своя игра» участвует 3 знатока. В прошлом году для проведения цикла передач отобрали *n* участников. Удалось провести игры так, что каждый участник встретился с каждым ровно в одной игре. В этом году отобрали 3*n* участников. Могло ли оказаться так, что через несколько дней каждый участник встретился с каждым ровно в одной игре? (*С.Волченков*)

Решение. Могло. Разделим знатоков этого года на три группы по n человек. Припишем каждой группе свой цвет, и занумеруем в ней участников от 1 до n. У нас есть прошлогодние тройки номеров. Для каждой такой тройки сделаем по 9 новых троек: 3 тройки, когда все номера относятся к одноцветным участникам, и 6 троек, когда участники с данными номерами – трех разных цветов. Кроме того, добавим ещё n троек, когда номера участников одинаковы, но они – трёх разных цветов.

Докажем, что каждый с каждым встретится ровно один раз. Пусть есть два участники M и N с номерами m и n соответственно.

Случай 1: $m<n$. В прошлом году участники с такими номерами входили ровно в одну тройку (k, m, n). Если M и N – разного цвета, то они встретятся в разноцветной тройке (k, m, n), причем цвет k определяется однозначно: он отличается от цветов M и N. Если M и N – одинакового цвета, то они встретятся в одноцветной тройке (k, m, n), причем цвет k определяется однозначно: он совпадает с цветами M и N.

Случай 2. $m=n$. Тогда M и N – разного цвета. Они встретятся в разноцветной тройке (m, m, m).

7. В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AC* = *BC*) проведена биссектриса *AD*. На основании отмечена точка *E*, что *AE* = *BD*, на стороне *AC* – точка *F* такая, что *AF* = *AB*. Докажите, что точка пересечения *AD* и *EF* лежит на высоте треугольника *ABC*. (*Д.Калинин*)

Решение. Пусть *H* – указанная точка пересечения. Точка *F* симметрична *B* относительно биссектрисы *AD*, поэтому $FD = BD = AE$ и $\angle AFD = \angle ABD = \angle FAE$. Треугольники *AFD* и *FAE* равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle AFE = \angle DAF$, то есть треугольник *AHF* – равнобедренный. Симметричный ему относительно *AD* треугольник *AHB* тоже равнобедренный, значит, точка *H* лежит на серединном перпендикуляре к стороне *AB*. А это и есть высота треугольника *ABC*.

8. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z) таких, что $xy+yz+xz-xyz=2$.

Решение. ***Ответ***. (1, 1, 1), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2). ***Доказательство.*** Так как x, y, z входят в уравнение симметрично, достаточно рассмотреть случай $x \le y \le z$. Тогда $xy \le xz \le yz$, и $2 \le 3yz-xyz=(3-x)yz$. Отсюда $3-x>0$. Так как x – натурально, то $x=1$ или $x=2$. При $x=1$ уравнение превращается в $y+z=2$, откуда $y=z=1$. . При $x=2$ уравнение превращается в $2y+2z-yz=2 \Leftrightarrow yz-2y-2z+2=4 \Leftrightarrow (y-2)(z-2)=2$, откуда $y-2=1$, $z-2=2$ и $x=2$, $y=3$, $z=4$.