XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
X Южный математический турнир.
Старт-лига. 1 октября 2015 года.
Полуфиналы Высшей лиги

1. Есть 13 внешне одинаковых монет. Суд знает, что их веса 1г, 2г, …, 13 г. Эксперт знает точный вес каждой монеты. У него есть весы с двумя чашками, которые показывают равновесие (загорается лампочка) или неравновесие, но не показывают, какая чаша тяжелее. Можно ли провести 3 взвешивания на таких весах так, чтобы суду стал ясен вес каждой из монет? (*А.Шаповалов*)

2. Внутри остроугольного треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAC=\angle PBC$. Пусть L и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC и AC, соответственно, D — середина AB. Докажите, что $DL=DN$. (*JMBO, shortlist*)

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть восемь чисел с суммой 404. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А.Шаповалов*)

4. Решите в натуральных числах уравнение:

$$x^4+y^4+z^4-x^2y^2-y^2z^2-x^2z^2=2015.$$ (*JMBO, shortlist, по мотивам*)

5. В ряд лежат куски сыра. Если веса соседей не равны, то отношение большего к меньшему не превосходит 4. Разрешено все или некоторые куски разрезать на 2 части. Докажите, что можно разрезать и выложить все куски в ряд так, чтобы в каждой паре отношение большего к меньшему не превосходило 2. (*А.Шаповалов*)

6. От однокругового футбольного турнира осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Взглянув на неё, математик определил, что в турнире не было ничьих. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире? (*А.Шаповалов*)

7. На плоскости отмечены 74 точки. Если выкинуть любую точку, то остальные можно зачеркнуть восемью прямыми. Докажите, что все точки можно зачеркнуть восемью прямыми. (*С.Волченков, А.Шаповалов*)

8. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3\geq 2\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right)$$

(*JMBO, shortlist, по мотивам*)

Стыковые бои Высшей лиги и все бои Первой лиги

1. Докажите, что для любых действительных чисел a,b,c выполнено неравенство

$$a^2+b^2+c^2+12 \geq 4(a+b+c).$$ *(фольклор)*

2. Какое наибольшее количество прямых можно провести на плоскости так, чтобы каждая прямая пересекала ровно четыре другие?

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 99. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть три числа с суммой 100. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А.Шаповалов*)

4. Клетки шахматной доски занумерованы числами 1, 2, …, 64. Докажите, что найдутся две клетки с общей стороной, чьи номера отличаются не более чем на 30. (*А.Шаповалов*)

5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 20152015.$$

6. Туристическое агентство Орлятии предлагает кольцевые автобусные маршруты по стране. Каждый маршрут проходит по городам маршрута ровно по разу. Есть маршруты из 3, 4, 5, 6 и 7 городов. Какое наименьшее число автодорог может быть в Орлятии, если каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. (С дороги на другую дорогу вне города переехать нельзя). (*С. Волченков*)

7. Дан квадрат $ABCD$. На отрезках AC и BC выбраны точки E и F соответственно так, что $FE=ED$. Найдите угол FDE.

8. Натуральные числа от 1 до 30 000 выписаны по порядку:

123456789101112…2999930000.

Сколько раз в этой последовательности цифр встречается комбинация 2015 (именно в этом порядке)?