XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
X Южный математический турнир.
Старт-лига. 4 тур. 1 октября 2015 года.
Высшая лига. Полуфиналы. Решения.

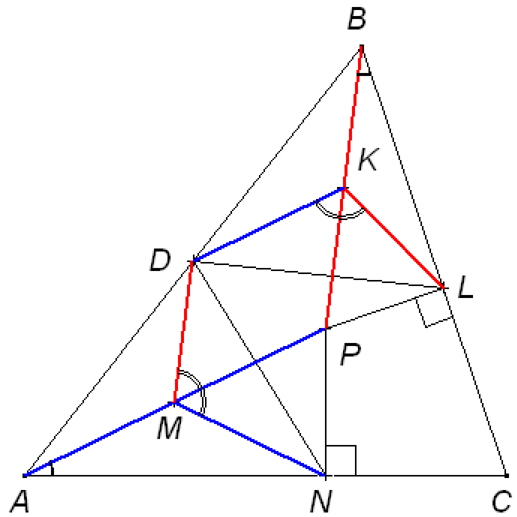
1. Есть 13 внешне одинаковых монет. Суд знает, что их веса 1г, 2г, …, 13 г. Эксперт знает точный вес каждой монеты. У него есть весы с двумя чашками, которые показывают равновесие (загорается лампочка) или неравновесие, но не показывают, какая чаша тяжелее. Можно ли провести 3 взвешивания на таких весах так, чтобы суду стал ясен вес каждой из монет? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: Можно. ***Доказательство:*** Каждый раз эксперт устраивает равновесие. В первый раз 8 монет уравновешиваются тремя. 36=1+2+…+8≤8 монет=3 монеты≤11+12+13=36, поэтому знаем 3 группы: A={1,2,3,4,5,6,7,8}, B={9,10} и C={11,12,13}. Соответственно, монеты из этих групп будем обозначать малыми буквами с индексами.

Второе взвешивание $15=1+2+3+9\le a_1+a_2+a_3+b_1=a_4+a_5\le 7+8=15$. Получим группы D={1,2,3}, E={4,5,6}, F={7,8}, C={11,12,13}, а монеты 9 и 10 уже определились.

Третье взвешивание: $32=1+4+7+9+11\le d_1+e_1+f_1+9+c_1=d_2+e_2+10+c_2\le 3+6+10+13=32$, что позволяет определить все монеты.

2. Внутри остроугольного треугольника *ABC* взята точка *P* так, что ∠*PAC*=∠*PBC*. Пусть *L* и *N* – основания перпендикуляров, опущенных из точки *P* на стороны *BC* и *AC*, соответственно, *D* – середина *AB*. Докажите, что *DL*=*DN*. (*JMBO, shortlist*)



Доказательство: Пусть *M* и *K* – середины отрезков *AP* и *BP* соответственно. Тогда *DM* – средняя линия в треугольнике *ABP*, *DM*=*BP*/2=*KL*, т.к. медиана из вершины прямоугольного треугольника (*BPL*) равна половине гипотенузы. Аналогично *DK*=*MN*. Кроме того, средние линии в треугольнике *ABP* дают нам два равных треугольника *AMD* и *DKB*. В результате получим, что ∠*DMN*=∠*DMP*+∠*PM*N=(∠*DAM*+∠*ADM*)+2∠*MAN* (внешний угол (для треугольников *ADM* и *AMN*) равен сумме двух внутренних несмежных с ним углов), аналогично ∠*DKL*=∠*DKP*+∠*PKL*=(∠*KDB*+*DBK*)+2∠*KBL*. Но в силу равенства соответствующих углов треугольников *AMD* и *DKB*, а также равенства ∠*MAN*=∠*PAC*=∠*PBC*=∠*KBL*, получаем, что ∠*DMN*=∠*DKL*. Значит, треугольники *DMN* и *DKL* равны по двум сторонам (*DM*=*KL*, *MN*=*DK*) и углу между ними (∠*DMN*=∠*DKL*), тогда *DL*=*DN*, что и требовалось доказать.

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть восемь чисел с суммой 404. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: Выигрывает Вася. ***Решение:*** Он мысленно разбивает все числа на пары с суммой 101. После хода Пети остается всегда не менее 12 чисел. В ответ на ход Пети

Вася вычёркивает все числа из начатых Петей пар и столько же целых пар, сколько вычеркнул Петя. После шестого хода Васи останется всего 4 числа.

4. Решите в натуральных числах уравнение: $x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2 = 2015$. (*JMBO, shortlist, по мотивам*)

Ответ: нет решений в натуральных числах. ***Доказательство:*** Квадрат целого числа при делении на 3 имеет остатки 0 или 1. Разберём варианты остатков с точностью до симметрии (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1) и (1, 1, 1), получим, что правая часть уравнения имеет остатки 0, 1, 1 и 0 соответственно, но число 2015 имеет остаток 2 при делении на 3. Значит, равенство невозможно.

5. В ряд лежат куски сыра. Если веса соседей не равны, то отношение большего к меньшему не превосходит 4. Разрешено все или некоторые куски разрезать на 2 части. Докажите, что можно разрезать и выложить все куски в ряд так, чтобы в каждой паре отношение большего к меньшему не превосходило 2. (*А.В.Шаповалов*)

Решение: Выложим куски в ряд слева направо по возрастанию веса. Предположим, что где-то кусок K больше учетверенного левого соседа. Объявим кусок K и его соседей справа большими, а куски слева от K – малыми. Каждый большой кусок больше любого учетверенного малого. Но в исходной цепочке где-то лежали рядом большой и малый куски – противоречие. Значит, и в новом ряду в каждой паре соседей вес правого куска не больше учетверенного веса левого куска.

Разрежем каждый кусок в отношении 1:2 и положим части на место старого куска: меньший слева, больший – справа. Из кусков $3a \le 3b$ получит после разрезания такой фрагмент ряда: a $2a$ b $2b$. Поскольку $b/a = 3b/3a \le 4$, то $b/2a \le 2$. С другой стороны, $2a/b \le 2$ так как $a \le b$.

6. От однокругового футбольного турнира осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Взглянув на неё, математик определил, что в турнире не было ничьих. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире? (*А.В.Шаповалов*)

Решение не публикуется, так как ни одна команда задачу не решила.

7. На плоскости отмечены 74 точки. Если выкинуть любую точку, то остальные можно зачеркнуть восемью прямыми. Докажите, что все точки можно зачеркнуть восемью прямыми. (*С.Г.Волченков, А.В.Шаповалов*)

Решение: Выкинем любую точку и зачеркнем оставшиеся 73 точки восемью прямыми. На некоторой прямой l окажется не менее 10 точек. Начнем сначала, и выкинем любую точку с l, и зачеркнем оставшиеся 73 точки восемью прямыми. Если среди этих прямых нет l, то каждая зачеркивает на l не более одной точки, а у нас там оставалось 9 точек. Значит, среди этих восьми прямых есть и l, которая, в том числе, зачеркнула и выкинутую точку.

8. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3 \ge 2\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right).$$

(*JMBO, shortlist, по мотивам*)

***Доказательство*:** Перенесём все слагаемые правой части налево, заменим каждую разность в числителе корня на сумму двух других переменных (например, $1-a=b+c$), дроби в левой части с общим знаменателем превратим в одну дробь с таким знаменателем, число 3 разобьём на три 1. Сгруппируем получившиеся слагаемые в три группы: $\left(\frac{b+c}{a}-2\sqrt{\frac{b+c}{a}}+1\right)+\left(\frac{c+a}{b}-2\sqrt{\frac{c+a}{b}}+1\right)+\left(\frac{a+b}{c}-2\sqrt{\frac{a+b}{c}}+1\right)$.

Тогда левая часть нового равносильного неравенства превратится в сумму трёх квадратов, которая будет неотрицательной, что даёт нам доказательство исходного неравенства:

$$\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}-1\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c+a}{b}}-1\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}-1\right)^2\geq 0.$$

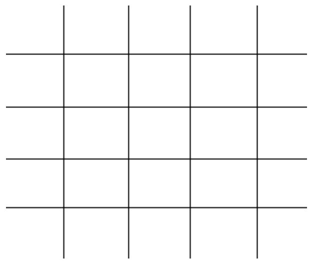
Высшая лига (бои за 5-8 места). Первая лига. ***Решения.***

1. Докажите, что для любых действительных чисел *a*,*b*,*c* выполнено неравенство

$a^2+b^2+c^2+12 \geq 4(a+b+c)$. *(фольклор)*

Доказательство: $a^2+b^2+c^2+12 \geq 4(a+b+c) \Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2-4b+4+c^2-4c+4 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\geq 0$ – верное неравенство.

2. Какое наибольшее количество прямых можно провести на плоскости так, чтобы каждая прямая пересекала ровно четыре другие?



Ответ: 8 прямых, например, 2 семейства по 4 параллельных прямых (см. рис.).

Доказательство оценки: Рассмотрим некоторую прямую а, тогда существуют 4 непараллельные ей прямые, которые должны пересечься с прямой а, и ещё максимум 3 параллельных ей прямых, т.к. иначе любая непараллельная ей прямая будет пересекать больше 4 прямых.

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 99. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть три числа с суммой 100. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А.В.Шаповалов*)

Решение не публикуется, так как ни одна команда задачу не решила.Собственно, решения не знает даже автор, так как он хотел дать другую задачу, но из-за опечатки дал эту).

4. Клетки шахматной доски занумерованы числами 1, 2, …, 64. Докажите, что найдутся две клетки с общей стороной, чьи номера отличаются не более чем на 30. (*А.В.Шаповалов*)

***Решение*:** Пусть все разности не менее 31. Тогда у каждой из клеток с номерами 31, 32, 33, 34 не более, чем по 3 соседа, поэтому эти клетки лежат на краю доски. Рассмотрим клетки 31 и 32. Если обе они не угловые, то у них ровно по 3 соседа, причем два общих: №63 и №64. Такое возможно, только если они – соседи угловой клетки. Если же одна из клеток 31 и 32 угловая, то у них есть общий сосед, поэтому другая клетка будет третьей от угла. Также вблизи угла лежат пары (32, 33) и (33, 34). Но, получается, все они одного цвета и вблизи одного угла, что невозможно.

5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 20152015$.

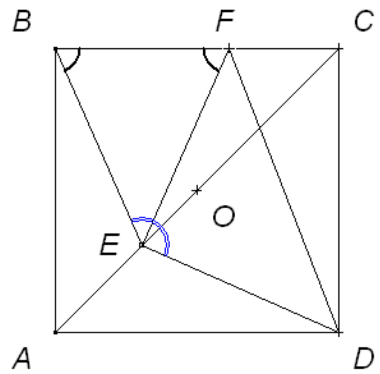
Ответ: 0 решений. ***Решение:*** Докажем, что это уравнение не имеет решений с помощью метода остатков. Квадрат чётного числа делится на 4 и при делении на 8 даёт либо остаток 0, либо остаток 4, а квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1: $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1\equiv 1 \pmod 8$ (так как n и $(n+1)$ – числа разной чётности, то $n(n+1)$ – чётно и тем самым $4n(n+1)$ делится на 8). Значит, сумма трёх точных квадратов будет давать при делении на 8 следующие варианты остатков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (находим перебором), но никогда не даст остатка 7. А 20152015 при делении на 8 даёт тот же остаток, что число, записанное последними тремя цифрами (в нашем случае 015), то есть, как раз остаток 7. Следовательно, равенство невозможно.

Комментарий: Сначала можно было бы рассмотреть остатки квадрата по модулю 4 – а это 0 и 1, у числа 2052015 остаток равен 3, значит, у нас все три остатка 1, т.е. сами наши числа – нечётные. Затем рассуждая по модулю 8, получаем, что сумма квадратов трёх нечётных чисел должна давать остаток 3, но 20152015 имеет остаток 7 – противоречие, значит, уравнение не имеет решений в целых числах.

6. Туристическое агентство Орлятии предлагает кольцевые автобусные маршруты по стране. Каждый маршрут проходит по городам маршрута ровно по разу. Есть маршруты из 3, 4, 5, 6 и 7 городов. Какое наименьшее число автодорог может быть в Орлятии, если каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. (С дороги на другую дорогу вне города переехать нельзя.)

Ответ: 9. ***Доказательство оценки*:** Допустим, есть не более 8 дорог. Будем кольцевые маршруты называть циклами. 7 дорог входят в цикл 7 городов. Если 8-я дорога не соединяет города из этого цикла, она не входит ни в какой цикл. А если соединяет, то с её участием добавляются два новых цикла. В любом случае, всего циклов – не более 3. ***Пример:*** Обозначим города буквами, а дороги – парами букв. Пусть кроме дорог цикла из 7 городов *ABCDEFG* есть ещё дороги *AC* и *AD*. Тогда есть циклы из любого нужного числа городов от 3 до 7: *ABC*, *ABCD*, *ADEFG*, *ACDE-FG* и *ABCDEFG*.

7. Дан квадрат *ABCD*. На отрезках *AC* и *BC* выбраны точки *E* и *F* соответственно так, что *FE=ED*. Найдите угол *FDE*.



Ответ: 45°. ***Решение*:** Заметим, что диагональ *AC* является осью симметрии квадрата, значит, в силу этой симметрии *BE=ED* и $\angle BEC=\angle DEC$. Тогда *BE=ED=FE* и *BEF* – равнобедренный треугольник. Пусть $\angle FBE=\alpha=\angle BFE$, тогда из треугольников *BEF* и *BEC* находим $\angle BEF=180°-2\alpha$, $\angle BEC=180°-\angle CBE-\angle BCE=180°-\alpha-45°=135°-\alpha$. Значит, $\angle FED=\angle BED-\angle BEF=2\angle BEC-\angle BEF=2\cdot(135°-\alpha)-(180°-2\alpha)=90°$. Следовательно, треугольник *FED* является равнобедренным (*FE=ED*) прямоугольным, значит, его острый угол $\angle FDE=45°$.

Комментарий: Из условия следует, что точка *E* должна находиться внутри отрезка *AO* (см. рис.), где *O* – центр квадрата, иначе не будет существовать точки *F*.

8. Натуральные числа от 1 до 30 000 выписаны по порядку:

123456789101112…2999930000.

Сколько раз в этой последовательности цифр встречается комбинация 2015 (именно в этом порядке)?

Ответ: 25 раз. ***Решение*:** Рассмотрим случаи, как могла возникнуть комбинация 2015. 1) 2015 полностью входит в число, тогда она либо является концом числа (2015, 12015, 22015 – *3 варианта*), либо началом пятизначного числа (2015… – *10 вариантов*). 2) 201 – конец предыдущего числа, 5 – начало следующего, что возможно только для соседних четырёхзначных чисел 5201 и 5202, т.к. пятизначных чисел, начинающихся с 5, у нас нет (*1 вариант*). 3) 20 – конец предыдущего числа, 15 – начало следующего, тогда либо это соседние четырёхзначные числа 1520 и 1521 (*1 вариант*), либо соседние пятизначные 15…20 и 15…21 (*10 вариантов*). 4) 2 – конец предыдущего числа, 015 – начало следующего, что невозможно. Всего получаем 3+10+1+1+10=25 вариантов.