XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
X Южный математический турнир.
Старт-лига. 2 тур. 28 сентября 2015 года.
<u>Высшая лига.</u> Решения.

1. В двух соседних вершинах 100-угольника стоят чёрная и белая фишки. За ход любую одну фишку можно передвинуть в свободную соседнюю вершину (фишки не обязательно ходят по очереди). Нельзя повторять позицию, которая была раньше. Какое наибольшее число ходов может быть сделано? (*С.Г.Волченков, А.В.Шаповалов*)

<u>Ответ:</u> 9800 ходов. ***<u>Доказательство оценки:</u>*** Раскрасим вершины по очереди в синий и красный цвета. Ход из позиции с фишками на разноцветных вершинах ведет в позицию с фишками на одноцветных вершинах, и наоборот. Значит, ходов не может быть больше, чем удвоенное число позиций с одноцветными вершинами. А таких позиций $100 \cdot 49$. Значит, ходов не более чем $2 \cdot 100 \cdot 49 = 9800$. ***<u>Пример:</u>*** Можно считать, что чёрная фишка стоит по часовой стрелке от белой. Ход по часовой стрелке назовем ходом вправо, против часовой – влево. Сделаем черной фишкой 98 ходов вправо (она упрётся в белую фишку), затем белой ход вправо, затем чёрной 96 ходов влево (между ней и белой фишкой останется одна свободная вершина), и снова ход белой вправо. Такую последовательность из $2 \cdot 98$ ходов повторим 50 раз, только вместо последнего хода белой фишкой вправо сделаем ход чёрной фишкой влево. Итого сделано $50 \cdot 2 \cdot 98 = 9800$ ходов. Позиции не повторяются, так как после каждого хода белая фишка оказывается на новом месте, а между ходами белой чёрная движется только в одну сторону.

2. Петя разливает литр сока по 6 кружкам так, чтобы во всех кружках сока было не поровну. Ход состоит в переливании из одной кружки в другую части сока так чтобы сока в этих двух кружках стало поровну. Первый ход делает Вася, а затем Петя делает сколько хочет таких ходов. Докажите, что Петя может так разлить вначале сок по кружкам, и затем так ходить, чтобы уравнять объём сока во всех кружках независимо от Васиного переливания. (*США, олимпиада для юниоров, по мотивам*)

<u>Решение:</u> Петя может действовать вначале следующим образом – сразу разлить сок по кружках в виде арифметической прогрессии ($a-5d$, $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$, $a+5d$), например, $\frac{5}{45}, \frac{6}{45}, \frac{7}{45}, \frac{8}{45}, \frac{9}{45}, \frac{10}{45}$ (литра). Будем считать центром симметрии нашей прогрессии число $a = \frac{1}{6}$, которое в конце концов и должно получиться в каждой кружке. Если Вася слил два симметричных числа-кружки, получив a, то Петя сливает кружки в каждой из двух оставшихся симметричных пар. Если же Вася слил какие-то два несимметричных числа ($a+xd$, $a+yd$), где x и y – различные целые нечётные числа от (–5) до 5, то Петя сливает симметричную им пару ($a-xd$, $a-yd$) и оставшуюся симметричную пару, сразу получив в ней две кружки по a. После этого он за два раза сливает по одной кружке из Васиной пары и своей первой пары, получив ещё четыре кружки по a.

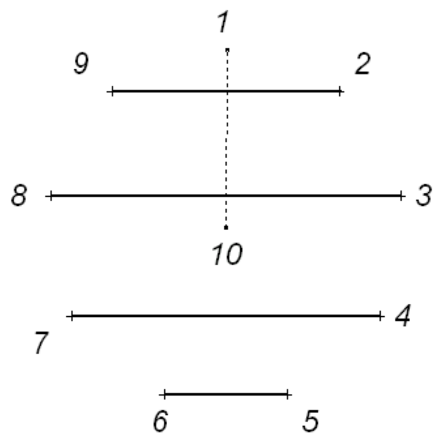
<u>Комментарий:</u> Из решения видно, что изначально Петя мог разбить сок в виде любого набора шести симметричных относительно a чисел: $a-b$, $a-c$, $a-d$, $a+d$, $a+c$, $a+b$, где $a>b>c>d>0$.

3. Даны 33 компьютера и неограниченное число кабелей 33 цветов. Можно ли соединить каждую пару компьютеров отдельным кабелем так, чтобы любая тройка компьютеров была соединена между собою кабелями трёх разных цветов? (*фольклор*)

Ответ: Да, можно. ***Решение:*** Фактически проведём среди этих 33 компьютеров шахматный турнир на 33 участника в 33 тура, раскрасив шахматные партии (кабели) каждого тура в свой цвет, в результате чего у каждой тройки компьютеров будет треугольник из кабелей трёх разных цветов, т.к. эти 3 партии играются в трёх разных турах. Обосновать существование такого турнира можно, например, следующими двумя способами, указав расписание туров. *Первый способ (табличный).* Рассмотрим турнирную таблицу на 33 команды и раскрасим её диагональной раскраской в 33 цвета (см. рис.), тогда номер цвета на пересечении строки и столбца соответствующих команд показывает номер тура, в котором они играют. В клетках же на главной диагонали из левого верхнего в правый нижний угол числа уберём, т.к. фактически это означает, что команда в соответствующем по номеру туре играет сама с собой, т.е. отдыхает.

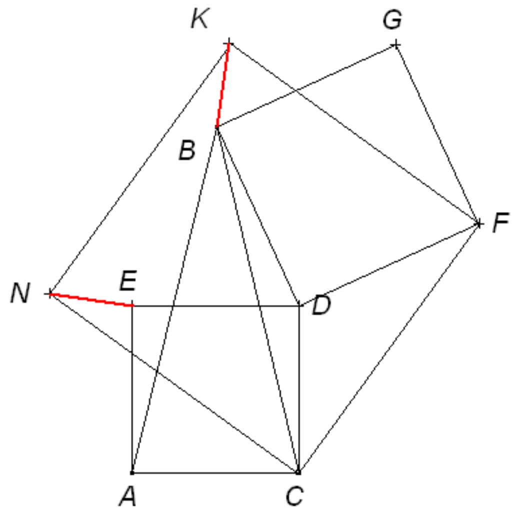
	1	2	3	4	…	31	32	33
1	1	2	3	4	…	31	32	33
2	2	3	4	5	…	32	33	1
3	3	4	5	6		33	1	2
4	4	5	6	7		1	2	3
…	…	…	…			…	…	…
31	31	32	33	1		28	29	30
32	32	33	1	2	…	29	30	31
33	33	1	2	3	…	30	31	32

При этом существует даже формула, по которой мы можем для любых двух команд (номера a и b, номера могут быть и одинаковыми для одной и той же команды) в турнире на нечётное $2N–1$ количество команд указать, в каком туре (t) эти две команды играют: $a+b\equiv t+1(\mathrm{mod}\ (2N–1))$. В случае чётного количества команд $2N$ действует та же самая формула по модулю $2N–1$. Но только надо учитывать, что когда номера совпадают, то в нечётном случае эта команда играет «сама с собой» (отдыхает), а в чётном случае эта команда играет с последней командой (номер $2N$). *Второй способ (через наглядный граф), который проходит для любого нечётного числа $2N–1\geq 3$).* Возьмём правильный выпуклый $(2N–1)$-угольник, отметим его центр, который будет ещё и центром описанной около этого многоугольника окружности. Для каждого радиуса рассмотрим все перпендикулярные ему диагонали и сторону (всего $N–1$ отрезок), которые покрасим в один свой цвет (см. рис.для случая $2N–1=9$). Тогда мы получим ровно $2N–1$ семейство одноцветных рёбер графа с различными концами. В случае чётного числа $2N$ команд мы отмечаем командой под номером $2N$ центр многоугольника и красим в соответствующий цвет ещё и радиус.



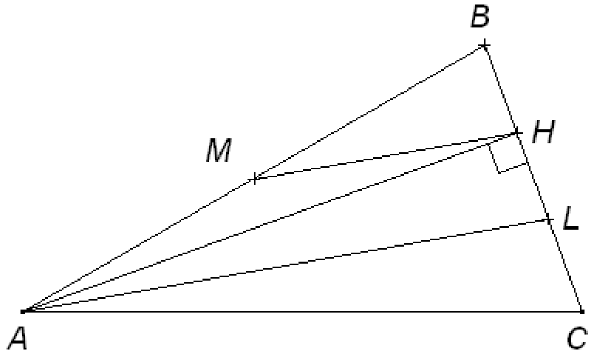
4. ***ABC*** **– равнобедренный треугольник (*AB=BC*), *ACDE*, *BDFG*, *CFKN* – квадраты, расположенные так, как показано на рисунке. Докажите, что *EN=BK*.** (*Д.Ю.Кузнецов*)

Решение: При повороте на 90° по часовой стрелке относительно точки C точка A перейдёт в точку D, точка N перейдёт в точку F, значит, треугольники ANC и DFC равны, тогда $AN=DF=GB$, $\angle NAC=\angle FDC$. При повороте на 90° по часовой стрелке относительно точки F точка C перейдёт в точку K, точка D перейдёт в точку G, значит, треугольники DFC и GFK равны, тогда $GK=DC=AE$, $\angle FDC=\angle FGK$. Как следствие получаем, что $AN=GB$, $AE=GK$ и $\angle EAN=\angle NAC-\angle EAC=\angle NAC-90°=\angle FDC-90°=\angle FGK-90°=\angle FGK-\angle FGB=\angle KGB$, значит, треугольники EAN и KGB равны по двум сторонам и углу между ними, тогда $EN=BK$.



5. Разбейте треугольник с углами 30°, 70° и 80° на два треугольничка и проведите в одном треугольничке биссектрису, а в другом – медиану так, чтобы они оказались параллельными. (*А.В.Шаповалов*)

Решение: Обозначим вершины исходного треугольника A, B и C так, чтобы $\angle A=30°$, $\angle B=80°$, $\angle C=70°$. Высотой AH разобьём его на прямоугольные треугольнички ABH и ACH, где $\angle HAB=10°$, $\angle HAC=20°$. Медиана HM треугольника АНВ отсекает равнобедренный треугольник AMH, поэтому $\angle AHM=10°$. Но и биссектриса AL треугольника ACH образует с высотой $\angle LAH=10°$. Поэтому эти биссектриса и медиана параллельны.



6. На развилке сходится 9 дорог. От развилки стартует грузовик, в его кузове 9 ящиков весами в 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и 23 центнера. Каждый ящик должен быть доставлен и выгружен в магазин на своей дороге, удаленный от развилки на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и 23 км соответственно, а до тех пор ящик остается в кузове. Шофёр берёт по рублю за каждый центнеро-километр, то есть считает пройденное расстояние между разгрузками, умножает его на вес груза и все эти произведения складывает. Какой минимальной платой может обойтись заказчик этой перевозки, если он сам выбирает порядок посещения магазинов? (чтобы попасть из одного магазина в другой приходится возвращаться на развилку) (*С.Г.Волченков*):

Ответ: 10000 рублей. ***Решение 1:*** Заметим, что каждый груз k мы обязательно провезём по куску дороги длины k, заплатив за это k^2, а также в каждой паре грузов m и n один из них будет выгружен раньше другого (например, m раньше n), значит, груз n дважды проедет по дороге длины m и мы заплатим за это $2mn$. Значит, вся плата не зависит от порядка разгрузки и равна сумме всех квадратов всех исходных весов и сумме всех удвоенных попарных произведений, т.е. равна квадрату суммы всех весов $(2+3+5+7+11+13+17+19+23)^2=100^2=10000$ (рублей).

Решение 2: Пусть грузовик посетил магазин M, а сразу за ним – магазин N. Покажем, что если бы он сначала поехал в N, а потом – в M, то плата была бы той же самой. Пусть расстояния до M и N равны m и n соответственно. Тогда веса соответствующих ящиков – тоже m и n. Стоимость перевозки остальных ящиков не меняется от перестановки поездок в M и N. Стоимость перевозок ящиков m и n в магазины, отличные от M и N, тоже не изменится. Вычислим стоимость перевозки ящиков m и n

в магазины M и N. В первом случае эта стоимость равна $(m+n)m+nm+n^2$: первое слагаемое соответствует поездке в M, второе – поездке обратно до развилки, третье – поездке в N. Аналогично, стоимость перевозки грузов m и n во втором случае равна $(m+n)n+mn+m^2$. Нетрудно видеть, что эти стоимости равны $(m+n)^2$. Т.к. последовательными перестановками можно установить любой порядок объезда магазинов, то стоимость перевозок всегда будет одной и той же независимо от порядка разгрузки. Остаётся её подсчитать для некоторого порядка разгрузки, например, при разгрузках по возрастанию весов.

7. В вершинах куба записаны *различные* натуральные числа, а на каждом ребре – НОД чисел в его концах. Может ли сумма чисел в вершинах быть равной сумме чисел на ребрах? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: Нет. ***Доказательство:*** НОД двух разных чисел не превосходит трети их суммы, при этом равенство будет только, когда одно число вдвое больше другого. Для какого-то из рёбер, идущего от наибольшего числа, равенства не будет. Сложив равенства по всем ребрам, мы получим нужное неравенство.

8. У Д'Артаньяна и трёх мушкетеров есть 100 монет. Они едут в ряд, плечом к плечу. У тех, кто справа от Арамиса, в сумме 60 монет; слева от Атоса – 70 монет, а слева и справа от Портоса монет поровну. Сколько монет у Д'Артаньяна? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: 10. ***Решение*:** Поскольку слева от Атоса и справа от Арамиса в сумме больше 100 монет, какие-то из монет учтены дважды. Это монеты того или тех, кто едет между Атосом и Арамисом, и таких монет 60+70–100=30. Атос, Арамис и тот, кто между ними – как минимум 3 человека, поэтому если кто-то не между Атосом и Арамисом, он – крайний. Но, по условию, Портос – не крайний, значит, он едет между Атосом и Арамисом. Если между ними только ехал только он один, то слева от Атоса и справа от Арамиса было бы поровну монет. Значит, между Атосом и Арамисом едет ещё и Д'Артаньян, и Атос – крайний справа, а Арамис – крайний слева. Поэтому у Атоса 100–70=30 монет, а у Арамиса 100–60=40 монет. Чтобы уравновесить для Портоса монеты Арамиса, Д'Артаньян должен ехать справа от Портоса и иметь 40–30=10 монет.

Первая лига. *Решения.*

1. В двух соседних вершинах 12-угольника стоят чёрная и белая фишки. За ход любую одну фишку можно передвинуть в свободную соседнюю вершину вершину (фишки не обязательно ходят по очереди). Нельзя повторять позицию, которая была раньше. Может ли быть сделано более 112 ходов? (*С.Волченков, А.Шаповалов*)

Ответ: Может, причём даже 120 ходов. ***Пример:*** Можно считать, что черная фишка стоит по часовой стрелке от белой. Ход по часовой стрелке назовем ходом вправо, против часовой – влево. Сделаем черной фишкой 10 ходов вправо (она упрется в белую фишку), затем белой ход вправо, затем черной 8 ходов влево (между ней и белой фишкой останется одна свободная вершина), и снова ход белой вправо. Такую последовательность из 20 ходов повторим 6 раз, только вместо последнего хода белой фишкой вправо сделаем ход черной фишкой влево. Итого сделано 120 ходов. Позиции не повторяются, так как после каждого хода белая фишка оказывается на новом месте, а между ходами белой черная движется только в одну сторону.

2. Петя разливает полтора литра сока по 6 кружкам так, чтобы во всех кружках сока было не поровну. Ход состоит в переливании из одной кружки в другую части сока так чтобы сока в этих двух кружках стало поровну. Первый ход делает Вася, а затем Петя делает сколько хочет таких ходов. Докажите, что Петя может так разлить вначале сок по кружкам, и затем так ходить, чтобы уравнять объём сока во всех кружках независимо от Васиного переливания. (*США, олимпиада для юниоров, по мотивам*)

Решение: Петя может действовать вначале следующим образом – сразу разлить сок по кружках в виде арифметической прогрессии ($a–5d$, $a–3d$, $a–d$, $a+d$, $a+3d$, $a+5d$), например, $\frac{5}{30},\frac{6}{30},\frac{7}{30},\frac{8}{30},\frac{9}{30},\frac{10}{30}$ (литра). Будем считать центром симметрии нашей прогрессии число $a=\frac{1}{4}$, которое в конце концов и должно получиться в каждой кружке. Если Вася слил два симметричных числа-кружки, получив a, то Петя сливает кружки в каждой из двух оставшихся симметричных пар. Если же Вася слил какие-то два несимметричных числа ($a+xd$, $a+yd$), где x и y – различные целые нечётные числа от (–5) до 5, то Петя сливает симметричную им пару ($a–xd$, $a–yd$) и оставшуюся симметричную пару, сразу получив в ней две кружки по a. После этого он за два раза сливает по одной кружке из Васиной пары и своей первой пары, получив ещё четыре кружки по a.

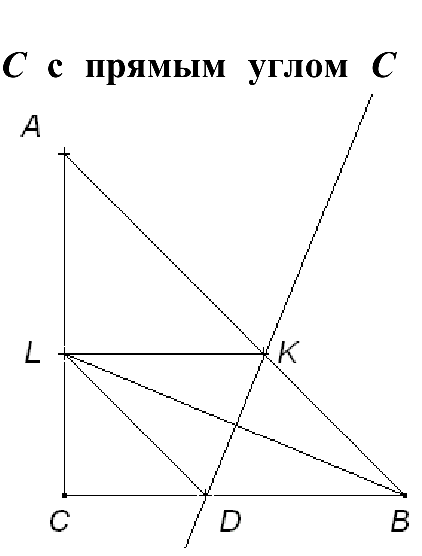
Комментарий: Из решения видно, что изначально Петя мог разбить сок в виде любого набора шести симметричных относительно a чисел: $a–b$, $a–c$, $a–d$, $a+d$, $a+c$, $a+b$, где $a>b>c>d>0$.

3. Даны 33 компьютера и неограниченное число кабелей 32 цветов. Можно ли соединить каждую пару компьютеров отдельным кабелем так, чтобы любая тройка компьютеров была соединена между собою кабелями трёх разных цветов? (*фольклор*)

Ответ: Нет.

Доказательство: Предположим, что мы смогли так сделать, значит, от каждого компьютера отходит по одному кабелю каждого из 32 цветов, иначе возникнет треугольник с двумя одноцветными кабелями от такого компьютера. Рассмотрим один из этих цветов. Получается, что мы имеем кабели этого цвета с суммарно нечётным количеством концов (33), что невозможно, т.к. у каждого кабеля 2 конца, а в сумме должно быть чётное количество концов.

4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *C* серединный перпендикуляр к биссектрисе *BL* пересекает катет *BC* в точке *D*. Докажите, что *BD*=*AL*. (*Д.Кузнецов*)



Решение 1: Т.к. точка D лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BL, то она равноудалена от концов отрезка, тогда треугольник DBL – равнобедренный, значит, $\angle DLB=\angle DBL=\angle LBA$ (т. к BL – биссектриса). Тогда углы DLB и LBA являются накрест лежащими при параллельных прямых LD и AB, значит, $ABDL$ – трапеция с равными (по 45°) углами при основании, т.е. это равнобочная трапеция и $BD=AL$.

Решение 2: Пусть серединный перпендикуляр в отрезку BL пересекает гипотенузу AB в точке K, тогда отрезки BD и BK равны, как стороны равнобедренного треугольника DBK (биссектриса угла B является ещё и высотой), а отрезки BK и KL равны, т.к. точка K лежит на серединном перпендикуляре к BL и равноудалена от его концов. Тогда $\angle KLB$ равен $\angle KBL$ (из равнобедренности треугольника KBL), который в свою очередь равен $\angle LBD$ (т.к. BL – биссектриса $\angle ABC$). Тогда углы KLB и LBD являются накрест лежащими при параллельных прямых KL и BD, которая перпендикулярна AC, значит, $KL \perp AC$ и треугольник ALK является прямоугольным с $\angle LAK$=45°, т.е. является равнобедренным ($AL=KL$), но $KL=BD$, следовательно, $BD=AL$.

5. На плоскости расставлены 400 точечных вебкамер. Угол обзора каждой камеры не более 179 градусов. Докажите, что какая-то из камер видит не все остальные камеры. (*А.Костин*)

Решение: Будем рассуждать методом от противного – предположим, что каждая камера видит все остальные камеры. Рассмотрим выпуклую оболочку системы из 400 наших точек-вебкамер (*выпуклая оболочка* – это наименьший по площади выпуклый многоугольник, содержащий все данные точки). Тогда внутри оболочки камер нет, т.к. иначе такая камера не увидит хотя бы одну камеру-вершину оболочки. Значит, мы получаем выпуклый 400-угольник, у которого каждый угол не больше 179°, иначе камера не увидит сразу обе свои соседние вершины-камеры. Следовательно, внешний угол при каждой вершине будет не менее 1°, а сумма всех внешних углов (которая равна 360°) будет не менее 400° – противоречие. Значит, найдётся камера, которая видит не все остальные камеры.

6. На доске выписан ряд из нескольких натуральных чисел, при этом каждая цифра использована ровно в одном из чисел и ровно один раз. Известно, что каждое число, начиная со второго, равно сумме цифр предыдущего, а последнее число – однозначно. Найдите его. (*А.Шаповалов*)

Ответ: 9. ***Решение*:** Обозначим последнее число x. Общая сумма цифр равна 45, поэтому второе число – меньше 45. Оно не однозначно, иначе всего было бы два числа, а общая сумма цифр была бы равна $2x \neq 45$. Значит, второе число двузначно. Допустим, и третье число двузначно. В нём все цифры различны, и нет нуля (иначе цифра повторится в следующем числе), значит, оно минимум 12, и второе число равно 39, т.к. среди двузначных чисел, меньших 45, только число 39 обладает нужной нам суммой цифр, не меньшей 12. Но тогда цифра 3 повторится в 4-м числе. Итак, третье (и последнее) число – однозначно. Тогда сумма цифр второго равна x, а первого $45–2x$. Число минус его сумма цифр кратны 9, поэтому $(45–2x)–x$ кратно 9, то есть x кратно 3. Перебирая число x, равное 3, 6 или 9, видим, что подходит только 9. Пример: 1034568; 27; 9.

7. В вершинах куба записаны *различные* натуральные числа, а на каждом ребре – НОД чисел в его концах. Может ли сумма чисел в вершинах быть равной сумме чисел на ребрах? (*А.Шаповалов*)

Ответ: Нет. ***Решение*:** НОД двух разных чисел не превосходит трети их суммы, при этом равенство будет только когда одно число вдвое больше другого. Для какого-то из ребер, идущего от наибольшего числа, равенства не будет. Сложив равенства по всем ребрам, мы получим нужное неравенство.

8. У Д'Артаньяна и трёх мушкетеров есть 100 монет. Они едут в ряд, плечом к плечу. У тех, кто справа от Арамиса, в сумме 60 монет; слева от Атоса – 70 монет, а слева и справа от Портоса монет поровну. Сколько монет у Д'Артаньяна? (*А.Шаповалов*)

Ответ: 10. ***Решение*:** Поскольку слева от Атоса и справа от Арамиса в сумме больше 100 монет, какие-то из монет учтены дважды. Это монеты того или тех, кто едет между Атосом и Арамисом, и таких монет 60+70–100=30. Атос, Арамис и тот, кто между ними – как минимум 3 человека, поэтому если кто-то не между Атосом и Арамисом, он – крайний. Но, по условию, Портос – не крайний, значит, он едет между Атосом и Арамисом. Если между ними только ехал только он один, то слева от Атоса и справа от Арамиса было бы поровну монет. Значит, между Атосом и Арамисом едет ещё и Д'Артаньян, и Атос – крайний справа, а Арамис – крайний слева. Поэтому у Атоса 100–70=30 монет, а у Арамиса 100–60=40 монет. Чтобы уравновесить для Портоса монеты Арамиса, Д'Артаньян должен ехать справа от Портоса и иметь 40–30=10 монет.