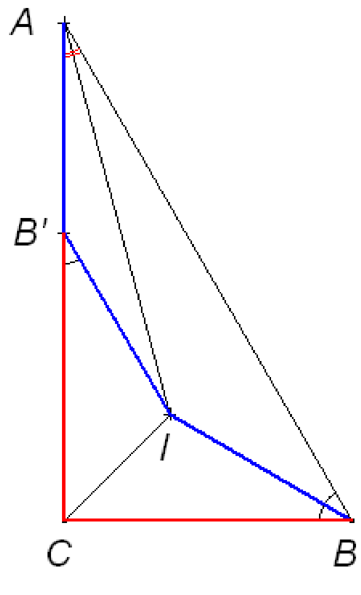
XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
X Южный математический турнир.
Старт-лига. 1 тур. 27 сентября 2015 года.
***<u>Высшая лига.</u> Решения*.**

1. Есть 88 яблок, средний вес яблока равен 100 г. Средний вес тех яблок, которые легче 100 г, равен 85 г. Средний вес тех яблок, которые тяжелее 100 г, равен 135 г. Какое наименьшее число яблок может иметь вес ровно 100 г? (*Швеция-2014, по мотивам*)

<u>Ответ:</u> 8 яблок, например, 8 яблок по 100 г, 56 яблок по 85 г и 24 яблока по 135 г. ***<u>Доказательство оценки:</u>*** Пусть есть m яблок легче 100 г и n яблок тяжелее 100 г. Их общий вес равен $85m+135n$ г, а средний – 100 г, откуда $85m+135n = 100(m+n) \Leftrightarrow 35n=15m \Leftrightarrow 7n=3m$. Значит, n кратно 3, m кратно 7, и $m/7=n/3=k$ – целое. Тогда $m+n=10k$ – кратно 10. Поэтому яблок, чей вес не равен 100 г, не более 80. Значит, яблок с весом 100 г не менее 8.

2. В одной капле живут «амёбы-рыцари», которые всегда говорят правду, и «амёбы-лжецы», которые всегда лгут. Особенность их в том, что, сделав какое-то заявление, каждая из них меняет свой тип: «амёба-рыцарь» становится «амёбой-лжецом» и наоборот. Однажды миллион амёб расположились по кругу. Начав с амёбы Жени и обойдя круг по часовой стрелке, их всех по очереди спросили: «Твои соседи сейчас одного типа?». Затем снова, начав с Жени и обойдя круг против часовой стрелки, им всем задали тот же вопрос. Все ответы были «Да» или «Нет». Какое наибольшее число ответов «Да» могло быть? (*Е.Исаак, А.ВШаповалов, О.И.Южаков*)

<u>Ответ:</u> 1000002. ***<u>Решение:</u>*** Сравним ответы одной и той же амёбы в первый и второй раз. Женю спросили два раза подряд, она сменила тип, а её соседи – нет, поэтому ответы противоположны. Будем считать, что сосед по часовой стрелке – слева. Пусть слева от Жени – Саша, справа – Олег. У Саши между вопросами левый сосед сменил тип дважды, а он сам и Женя справа – по разу, поэтому ответ Саши не изменился. У Олега сосед справа не изменился, а он сам и Женя справа сменили тип по разу, поэтому ответ Олега не изменился. У любой другой амёбы сосед слева сменил тип дважды, сосед справа типа не менял, а она сама сменила тип, поэтому ответ изменился на противоположный. Итак, кроме Олега и Саши, все остальные по разу сказали «Да». Олеги и Саша могли сказать «Да» по 2 раза, поэтому ответов «Да» не более 1000002. Такое возможно: пусть изначально Саша, Женя и Олег – рыцари, слева от Саши – лжец.



3. I – точка пересечения биссектрис в прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB. Известно, что $AC=BC+BI$. Найдите углы A и B. (*О.И.Южаков*)

<u>Ответ:</u> $\angle A=30°$, $\angle B=60°$. ***<u>Решение:</u>*** Пусть $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\alpha+\beta=90°$. Отметим на отрезке AC такую точку B', что $AB'=BI$, $CB'=CB$. Отрезки BI и $B'I$ равны в силу симметрии относительно биссектрисы CI, значит, треугольник $AB'I$ равнобедренный. Тогда $\angle B'IA=\angle B'AI=\alpha/2$, $\angle CB'I=\angle B'IA+\angle B'AI=\alpha$ (как внешний угол треугольника $AB'I$) и также в силу симметрии

$\angle CB'I=\angle CBI=\beta/2$. Получаем систему из двух уравнений $\alpha=\beta/2$ и $\alpha+\beta=90°$, откуда $\alpha=30°$, $\beta=60°$.

<u>Комментарий:</u> похожее решение возникнет в случае, если бы мы отложили точку A' на продолжении отрезка CB за точку B так, что $BA'=BI$.

4. Во время операции «Перехват» на кольцевой дороге стоят с равными промежутками 100 человек, среди них 50 – инспектора ГИБДД и 50 – сотрудники ФСБ. Докажите, что расстояние по кольцу между наиболее удаленными друг от друга инспекторами равно расстоянию по кольцу между наиболее удаленными друг от друга сотрудниками ФСБ. (*По мотивам Indian postal coaching-2012*)

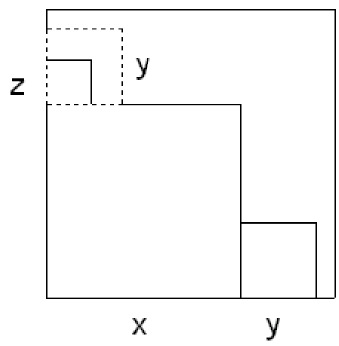
<u>Решение:</u> Будем считать инспекторов ГИБДД синими точками, сотрудников ФСБ – красными, а расстояние между соседними точками равным 1. Наиболее удалены друг от друга диаметрально противоположные точки – на расстояние 50.

Случай 1. Есть две противоположные точки A и B одинакового цвета, скажем, синего. Рассмотрим все точки, противоположные 50 красным точкам. Среди них нет точек A и B, поэтому синих среди них не более 48. Значит, найдутся две противоположные точки красного цвета C и D, и расстояния AB и CD оба равны 50.

Случай 2. Нет противоположных точек одинакового цвета. Тогда любое расстояние между одноцветными точками не больше 49. Найдем две соседние точки разного цвета, скажем C – синяя, и слева от неё K – красная. Диаметрально противоположные к ним точки обозначим C' и K' соответственно. В нашем случае их цвета противоположны, то есть C' – красная, а K' – синяя. Но тогда дуги CK' и $C'K$ не пересекаются, их длины равны 49 и у первой концы синие, у второй – красные.

5. Есть три квадрата общей площадью 1дм². Докажите, что их можно без наложений поместить в квадратную коробку площадью 2 дм². (*По мотивам задачи Всесоюзной олимпиады 1972 г.*)

<u>Решение:</u> Упорядочим стороны наших квадратов $x\geq y\geq z>0$. По условию $x^2+y^2<1$, значит, $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)+2xy=2-(x-y)^2<2$. Тогда $x+y<\sqrt{2}$, значит, квадраты можно будет разместить в квадрате со стороной $\sqrt{2}$ (площади 2) так, как показано на рисунке. При этом квадрат со стороной z уместится сверху, т.к. он по размеру не превосходит квадрат со стороной y.



<u>Комментарий:</u> нужное нам неравенство $x+y<\sqrt{2}$ можно также доказать другими способами, например, с помощью неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим ($\frac{x+y}{2}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}<\sqrt{\frac{1}{2}}$) или неравенства Коши для двух неотрицательных чисел ($\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$) между средним геометрическим и средним арифметическим ($(x+y)^2=x^2+y^2+2xy<1+2\sqrt{x^2y^2}\leq 1+2\cdot\frac{x^2+y^2}{2}=2$, откуда получим $x+y<\sqrt{2}$).

6. Рассматриваются всевозможные 100-значные числа, где каждая цифра равна 3 или 5. У каждого вычисляется остаток от деления на 1024. Сколько среди этих остатков разных? (*С.Г.Волченков*)

Ответ: 512. ***Решение*:** Заметим, что чётных остатков быть не может, значит, всего их не более 512. Вычтем из каждого числа 100-значное число T, состоящее из троек. У новых чисел остатки останутся различными, если они различались в начале. Новые числа будут содержать только нули и двойки. Разделим их на 2. Теперь числа состоят только из нулей и единиц, а нам надо рассмотреть остатки при делении на 512.

Пусть у некоторых двух новых чисел одинаковые остатки при делении на 512. Тогда их разность делится на 512 (а разность исходных чисел – на 1024), и по признаку делимости на степень двойки последние 9 цифр – нули. Итак, любая комбинация нулей и единиц на последних 9 местах однозначно определяет остаток от деления на 512. Таких комбинаций $2^9=512$. Обратные операции (умножение на 2 и прибавление T) превращают эти комбинации в исходные числа с разными остатками от деления на 1024.

7. Петя разбил на пары все натуральные числа от 2012 до 2019 и сложил произведения чисел в своих четырёх парах, получив число P. Вася разбил эти же числа на пары по-другому и тоже сложил произведения чисел в своих четырёх парах, получив число V. Может ли быть, что $P=V$? (*Д.Ю.Кузнецов*)

Ответ: Да, может, например, две суммы попарных произведений $P=(n-3)\cdot(n+4)+(n-2)\cdot(n+3)+(n-1)\cdot(n+1)+n\cdot(n+2)$ и $V=(n-3)\cdot(n+3)+(n-2)\cdot(n+4)+(n-1)\cdot(n+2)+n\cdot(n+1)$ будут равны $4n^2-4n-19$ при $n=2015$.

8. Из 3 жёлтых и 3 синих палочек сложен шестиугольник так, что на его контуре цвета палочек чередуются. Из каждых трёх подряд идущих палочек можно сложить треугольник. Докажите, что из палочек какого-то из цветов тоже можно сложить треугольник. (*А.В.Шаповалов*)

***Решение*:** Обозначим стороны по кругу a, b, c, d, e, f. Пусть f – наибольшая, тогда $f<d+e$, $f<e+a$, $f<a+b$. Если $f<b+d$, одноцветный треугольник найден. Пусть $f\geq b+d$. Тогда $a>d$, $e>b$. Докажем, что из одноцветных палочек (a, e, c) можно сложить треугольник. Наибольшая из этих палочек либо a или c (с точностью до симметрии). Если это c, то $a+e>b+d>c$ – неравенство треугольника выполнено. А если наибольшая a, то $e+c>b+c>a$, то есть (a, e, c) будет треугольником и в этом случае.

Первая лига. Решения.

1. Есть 88 яблок, средний вес яблока равен 100 г. Средний вес тех яблок, которые легче 100 г, равен 85 г. Средний вес тех яблок, которые тяжелее 100 г, равен 135 г. Какое наименьшее число яблок может иметь вес ровно 100 г? (*Швеция-2014, по мотивам*)

Ответ: 8 яблок, например, 8 яблок по 100 г, 56 яблок по 85 г и 24 яблока по 135 г.

Доказательство оценки: . Пусть есть m яблок легче 100 г и n яблок тяжелее 100 г. Их общий вес равен $85m+135n$ г, а средний – 100 г, откуда $85m+135n = 100(m+n) \Leftrightarrow 35n=15m \Leftrightarrow 7n=3m$. Значит, n кратно 3, m кратно 7, и $m/7=n/3=k$ – целое. Тогда $m+n=10k$ – кратно 10. Поэтому яблок, чей вес не равен 100 г, не более 80. Значит, яблок с весом 100 г не менее 8.

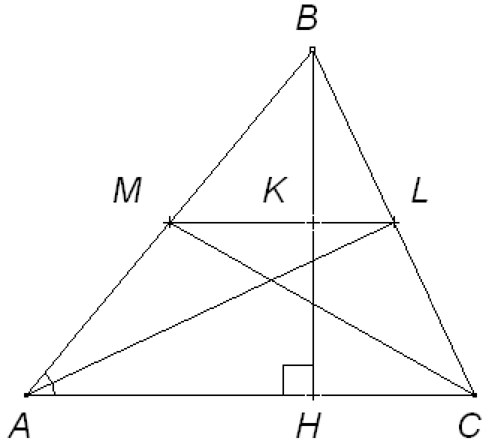
2. В одной капле живут «амёбы-рыцари», которые всегда говорят правду, и «амёбы-лжецы», которые всегда лгут. Особенность их в том, что, сделав какое-то заявление, каждая из них меняет свой тип: «амёба-рыцарь» становится «амёбой-лжецом» и наоборот. Однажды миллион амёб расположились по кругу. Обходя по кругу два раза, их по очереди спрашивали: «Твои соседи сейчас

одного типа?». Какое число ответов «Да» могло быть дано? (*Е.Исаак, А.Шаповалов, О.Южаков*)

<u>Ответ:</u> 1000000. ***<u>Решение:</u>*** Сравним ответы одной и той же амёбы в первый и второй раз. Между этими моментами сменился тип и у неё, и у её соседей. Совпадение или не совпадение типов соседей сохранилось, поэтому ответ изменился на противоположный. Из пары ответов каждой амёбы ровно один «Да» и один «Нет». Поэтому ответов «Да» столько же, сколько амёб.

3. В треугольнике *ABC* провели биссектрису *AL*, высоту *BH* и медиану *CM*. Оказалось, что отрезок *BH* делится пополам прямой *LM*. Докажите, что треугольник *ABC* – равнобедренный. (*А.Шаповалов*)

<u>Доказательство:</u> Пусть прямая *LM* пересекает *BH* в точке *K*.



***<u>Первое решение</u>*.** *MK* – средняя линия треугольника *BAH*. Значит, *MK*||*AC*. Поскольку прямая *ML*||*AC* и проходит через середину стороны *AB*, то *ML* – средняя линия треугольника *ABC*. Значит, *L* – середина *BC*. Но тогда *AL* – медиана и биссектриса одновременно, значит, треугольник *ABC* – равнобедренный (*AB*=*AC*).

***<u>Второе решение</u>*.** Как известно, в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Это значит, что середина медианы лежит на пересечении гипотенузы и серединного перпендикуляра к любому из катетов. В прямоугольном треугольнике *ABH* прямая *ML* проходит через середину гипотенузы и середину катета *BH*, поэтому она совпадает с серединным к перпендикуляром к *BH*. Но тогда в прямоугольном треугольнике *BCH* этот серединный перпендикуляр проходит через середину гипотенузы *BC*. Значит, *L* – середина *BC*. Тогда *AL* – медиана и биссектриса одновременно, значит, треугольник *ABC* – равнобедренный (*AB*=*AC*).

<u>Комментарий:</u> В приведённых решениях мы нигде не пользуемся расположением точки *H* относительно точек *A* и *C* на прямой *AC*. В случаях же совпадения точки *H* с *A* или *C* будут соответственно совпадения точки *K* с точками *M* и *L*. При этом на самом деле точка *H* не может совпасть с точкой *C* и не может находиться на продолжении стороны *AC* за точку *C*.

4. Во время операции «Перехват» на кольцевой дороге стоят с равными промежутками 100 человек, среди них 50 – инспектора ГИБДД и 50 – сотрудники ФСБ. Докажите, что расстояние по кольцу между самыми близкими друг к другу инспекторами равно расстоянию по кольцу между самыми близкими друг к другу сотрудниками ФСБ. (*По мотивам Indian postal coaching-2012*)

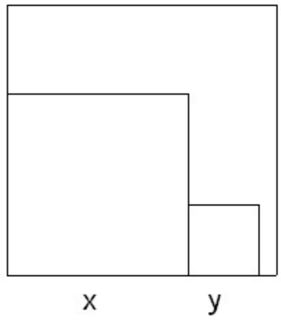
<u>Решение:</u> Будем считать инспекторов ГИБДД синими точками, сотрудников ФСБ – красными, а расстояние между соседними точками равным 1. Наиболее близки друг к другу соседние точки.

Случай 1. Есть две соседние точки *A* и *B* одинакового цвета, скажем, синего. Рассмотрим группы подряд идущих точек одинакового цвета. Они чередуются, и синих групп не более 49 (так как есть группа из более чем одной точки). Но тогда и

красных групп не более 49, и есть красная группа из более чем одной точки. Там есть две соседние красные точки *C* и *D*. Тогда расстояния *AB* и *CD* оба равны 1.
Случай 2. Нет соседних точек одинакового цвета. Тогда цвета точек строго чередуются. Взяв две синие точки через одну и две красные точки через одну, получим два минимальных расстояния 2.

5. Есть два квадрата общей площадью 1дм². Докажите, что их можно без наложений поместить в квадратную коробку площадью 2 дм². (*По мотивам задачи Всесоюзной олимпиады 1972 г.*)

Решение: По условию $x^2+y^2=1$, значит, $(x+y)^2 = x^2+y^2+2x\ y= 2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)+2xy = 2-(x-y)^2 \le 2$. Тогда $x+y\le\sqrt{2}$, значит, квадраты со сторонами x и y можно будет разместить в квадрате со стороной $\sqrt{2}$ (площади 2) так, как показано на рисунке.



Комментарий: нужное нам неравенство $x+y\le\sqrt{2}$ можно также доказать другими способами, например, с помощью неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим ($\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\le\sqrt{\frac{1}{2}}$) или неравенства Коши для двух неотрицательных чисел ($\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$) между средним геометрическим и средним арифметическим ($(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy\le 1+2\sqrt{x^2y^2}\le 1+2\cdot\frac{x^2+y^2}{2}=2$, откуда получим $x+y\le\sqrt{2}$).

6. Дан ребус ДЕНЕГ+НАДО=МНОГО (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые). Как велико может быть МНОГО? (найдите наибольшее значение) (*Л.Емельянов*)

Ответ: 28606. ***Решение*:** по последним цифрам видим , что Г=0, тогда сумма цифр в разряде десятков Е+Д оканчивается на 0, т.е. равна 10. В разряде тысяч при сложении Е≠0 и Н получилась цифра Н, значит, из предыдущего разряда должна была прийти 1 (большая цифра прийти не могла, т.к. НЕГ+АДО< 1000+1000=2000). Тогда получаем, что Е=9, Д=10–Е=1. Кроме того, из разряда тысяч перейдёт единица, т.к. Е+Н+1=10+Н. Значит, число МНОГО могло начинаться максимум с 28, при этом ДЕНЕГ=19890, тогда в разряде сотен А максимально 7, цифра О равна 6, а весь ребус имеет вид 19890+8716=28606.

7. Резервуар заполняется из двух труб: одна с пресной водой, другая – с солёной. Если открыть кран с пресной водой, то резервуар заполнится за 7 часов. Если открыть оба крана – за 4 часа 40 минут. Заполняя пустой резервуар, открыли сначала солёную воду, а через некоторое время – ещё и пресную. Когда резервуар заполнился, солёность воды в нём стала 17%. Сколько минут прошло между открытием первого и второго кранов, если солёность солёной воды была 35%? (*А.Шаповалов*)

Ответ: 192. ***Решение:*** За минуту «пресный» кран наполняет 1/420 резервуара, а оба крана вместе – 1/280. Значит, «солёный» кран в минуту заполняет 1/280–1/420=1/840 резервуара, то есть заполнит его за 840 мин.

При добавлении пресной воды солёность снизится во столько раз, во сколько возрастет общий объём воды. Приняв объём соленой воды за 1, получим общий объём $^{35}/_{17}$. Тогда объём пресной воды $^{18}/_{17}$, а доли пресной и солёной воды равны соответственно $^{18}/_{35}$ и $^{17}/_{35}$. Чтобы обеспечить такие доли, солёная вода должна течь $^{17}/_{35}\cdot 840 = 408$ мин, а пресная $-^{18}/_{35}\cdot 420 = 216$ мин. Поэтому «пресный» кран открыли через 408–216=192 мин после «солёного».

8. Есть шесть палочек общей длиной менее 2 м. Длина самой короткой палочки 1 дм. Докажите, что из каких-то трёх палочек можно сложить треугольник. (*фольклор*)

***Решение*:** Пусть ни из каких трёх палочек треугольник составить нельзя. Упорядочим палочки по длине. Самая короткая – 1 дм. Вторая – не менее 1 дм. Третья – не менее 2 дм, иначе из трёх первых палочек складывается треугольник. Следующая – не менее 3 дм, далее: 5 дм и 8 дм. Итак, суммарная длина первых шести палочек не менее 20 дм =2 м. Противоречие.