



## СТАРТ-ЛИГА

Командная олимпиада. 17 сентября 2013 г.

1. Можно ли выписать в ряд 10 натуральных чисел, чтобы среднее арифметическое любых двух или более подряд идущих чисел не было целым числом?
2. На складе имеется много мешков с песком общей массой более 1001 кг. Каждый мешок весит не более 1 кг. Докажите, что в грузовик, который может увезти 1000 кг и в тележку, в которую помещается 1 кг, можно отгрузить для вывоза не менее 1000 кг песка.
3. Разрежьте правильный шестиугольник на три части, из которых можно сложить треугольник.
4. Числа  $x$  и  $y$  различны и не равны 1. Докажите, что, если  $yz - \frac{x^2}{1-x} = zx - \frac{y^2}{1-y}$ , то  $yz - \frac{x^2}{1-x} = zx - \frac{y^2}{1-y} = x + y + z$
5. На сторонах квадрата  $ABCD$  построены равносторонние треугольники  $BCE$  (внутри квадрата) и  $CDF$  (наружу). Точки  $O$  и  $M$  – середины отрезков  $AC$  и  $EF$  соответственно. Докажите, что треугольник  $OCM$  – равносторонний.
6. Из целых чисел от 1 до 20 выбрали 7 различных. Докажите, что из выбранных чисел можно составить две группы с одинаковой суммой. В группы могут входить не все элементы.
7. Решите уравнение в целых числах  $36a^4 + b^4 = 9c^4 + 4d^4$ .
8. На доске написано число 2010. Каждый из двух игроков своим ходом прибавляет к написанному числу один из его простых делителей не больший 10. Выигрывает тот, кто напишет на доске число большее 1000000. Кто может выиграть, независимо от игры соперника?