Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info ***(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.***

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Настольные часы с часовой и минутной стрелками имеют форму куба с круглым циферблатом в центре одной из граней. На часах нет чисел и каких-либо пометок, показывающих, где у них верх. Поэтому можно случайно поставить их на бок или даже вверх ногами.

а) Какое время показывают часы на рисунке 1?

б) Есть ли в сутках хотя бы один такой момент, когда нельзя будет определить, какое время показывают эти часы?

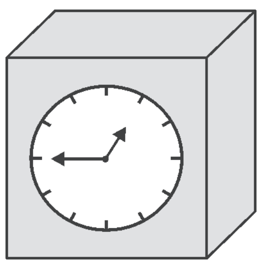

Рис. 1

Н.Стрелкова

12. По кругу стоят 10 бочек с водой. Сначала половину воды из первой бочки перелили во вторую; потом треть воды из второй бочки перелили в третью; затем четверть воды – из третьей бочки в четвертую; и т.д.; затем 1/10 из 9-й бочки в – 10-ю; и, наконец, долили воду из 10-й бочки в первую до ее исходного уровня.

Могло ли в каждой бочке оказаться столько же воды, сколько было в ней вначале?

Г.Гальперин

13. Пусть N – натуральное число. Каких треугольников с целыми длинами сторон больше – разносторонних, у которых длины стороны не меньше 1 и не больше $N+3$, или всевозможных, у которых длины сторон не меньше 1 и не больше N?

А.Эвнин

14. 60 детей построились парами и пошли в музей. По пешеходному переходу они шли толпой, а после него снова построились парами (но некоторые пары могли стать другими). Докажите, что в музее детей можно разбить на три равных группы так, что дети в одной группе не были в одной паре.

И.Богданов

15. Угол C при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120° (рис. 2). Из вершины C выпустили внутрь треугольника два луча, которые, отразившись от основания AB в точках M и N (по закону «угол падения равен углу отражения»), попали соответственно на боковую сторону AC в точку P и на боковую сторону BC в точку Q. Известно, что $AP = CQ$. Пусть отрезок PQ пересекает CM в точке X, а CN – в точке Y. Докажите, что треугольники PMX, XCY и QNY равны.

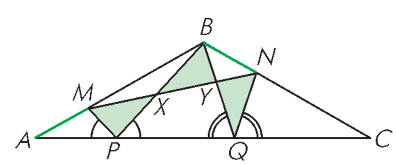

Рис. 2

В.Произволов

Летний турнир имени А.П.Савина

С наступлением лета школьники разъезжаются отдыхать. Но для некоторых ребят увлекательный отдых – решение математических задач. А также общение с теми, у кого такая же горячая любовь к математике. Каждый год в конце июня проходит турнир математических боев памяти А.П. Савина. В 2010 году он состоялся в 16-й раз. Как и раньше, он проходил на берегу живописного озера, на базе отдыха «Берендеевы Поляны» около Судиславля (Костромская область).

В соревнованиях приняли участие 38 команд из Москвы, Санкт-Петербурга, Костромы, Тамбова, Черноголовки, Харькова и Киева. Инициаторы проведения турнира – Григорий Вячеславович Кондаков и образовательная программа «Большая Перемена».

В первый день турнира прошла игра «Математическая абака». Это увлекательное соревнование, где ребятам надо выбирать задачи как по сложности, так и по темам. Так, например, семиклассникам предложили задания по логике и теории чисел, арифметике и алгебре, а также задания, объединенные в группу с расплывчатым названием «Числа». Из победителей назовем команды, занявшие первые места. Среди 6 классов – это команда кружка «Квантик» (Москва). Среди семиклассников – первая команда гимназии 1514 (Москва). Команда школы 82 из Черноголовки (Московская область) стала лучшей в 8 классах. Команда «А» ЦО 218 (Москва) заняла 1 место среди 9 классов.

На следующий день команды 6–8 классов участвовали в командной олимпиаде, по результатам которой они были разделены на лиги. А девятиклассники уже начали сражаться: 6 команд составили отдельную лигу и за 5 дней провели полный круговой турнир. Команды 6–8 классов разделились на подгруппы лиг 6 классов, 7 классов, 8 классов, а также смешанной лиги 7–8 классов.

Турнир математических боев – это не только борьба с задачами. Каждый вечер группы ребят и руководителей собираются возле листочков с результатами очередного тура, долго обсуждают итоги и пытаются делать прогнозы на следующий тур. Но надо признать, что в большей части групп лиг интриги не получилось: команды в итоге выстроились в таком порядке, когда команда, оказавшаяся в итоге выше, выигрывала у команды, оказавшейся ниже. Сложно было делать прогнозы в 9 классе: здесь три команды настойчиво выигрывали у остальных трех. Все шло к тому, что первые три команды выиграют друг у друга по кругу, и так же произойдет среди оставшихся трех команд. Неужели команды не распределятся по местам? Все ждали последний тур. В итоге неожиданная «ничья» определила 3 и 4 места, а 1 и 2 место определились по личной встрече между командами.

В лиге 6 классов лучшей стала команда московской гимназии 1514, выиграв в финальном бою у шестиклассников школы 179. Зато семиклассники школы 179 заняли первое место, победив прошлогоднего победителя – команду кружка «Фрактал» из Санкт-Петербурга. Первое место в лиге 8 классов заняла сборная команда кружка А.В.Спивака, в которой играл только один ученик 8 класса, а остальные игроки – семиклассники. В результате упорной борьбы в лиге 9 классов лучшей стала команда кружка Т.П.Зориной с названием «Москва-Юг». Заметим, что эта команда выиграла не только два летних турнира – осенью 2009 года они увезли кубок турнира «Kostroma Open 8–9».

Список всех призеров турнира представлен в таблице на с.30.

Один день турнира ребята отдыхают от математических боев. В это время проходит личная олимпиада, а точнее – целых четыре (по каждой из параллелей 6, 7, 8 и 9 классов). Среди шестиклассников лучшими стали *Степан Петров* из Санкт-Петербурга (школа 30) и пятиклассница *Дарья Николаева* (школа 464, Москва). Результат *Юли Зайцевой* (школа 179, Москва) в олимпиаде 7 классов был отмечен «гран-при», а первые дипломы получили два ее одноклассника *Илларион Дмитриев* и *Саша Ватузов*, а также *Андрей Зерцалов* из ЦО 218 Москвы. Но на этом дипломы, заработанные семиклассниками, не закончились – *Андрей Волгин* (7 класс, гимназия 1543, Москва) стал одним из лучших в олимпиаде 8 классов. Дипломы I степени также получили двое киевлян *Никита Щеглов* и *Данил Хилько* (оба – лицей 208) и москвич *Ваня Зверев* (школа 853, Москва). Команды киевского лицея 208, впервые приехавшие на турнир, увезли еще один диплом первой степени – его получил *Максим Чаудхари* в олимпиаде 9 классов. Вместе с ним такой результат

Сборная команда

Матеатический бой

показали *Саша Корочкин* (гимназия 1514, Москва) и *Лев Синяков* (школа 350, Москва).

Обладателями дипломов II степени стали: *Зайцева Татьяна* (6 кл., школа 179, Москва), *Ипатов Михаил* (6 кл., гимназия 1, Кострома), *Виленский Самуил* (6 кл., школа 57, Москва), *Ионица Георгий* (7 кл., гимназия 1543, Москва), *Петренко Иван* (7 кл., лицей 17, Кострома), *Лебедева Дарья* (7 кл., лицей 533, Санкт-Петербург), *Лукашевич Дмитрий* (7 кл., гимназия 28, Кострома), *Чистопольская Алиса* (7 кл., гимназия 1543, Москва), *Белугина Виктория* (7 кл., лицей 533, Санкт-Петербург), *Гудков Сергей* (8 кл., гимназия 1514, Москва), *Райко Арсений* (8 кл., школа 179, Москва), *Зуев Антон* (8 кл., школа 179, Москва), *Мельниченко Петр* (8 кл., школа 315, Москва), *Мукин Тарас* (8 кл., лицей 14, Тамбов), *Князева Алиса* (8 кл., ФМЛ 27, Харьков), *Кулаков Петр* (8 кл., школа 82, Черноголовка), *Любчик Евгений* (8 кл., УВК 45 АГ, Харьков), *Хачатурян Марина* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Никитин Игорь* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Харитонова Елена* (8 кл., лицей 208, Киев), *Заславский Олег* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Ситкин Александр* (8 кл., школа 179, Москва), *Меньшов Сергей* (9 кл., лицей 20, Междуреченск), *Ефимов Андрей* (9 кл., ЦО 218, Москва), *Сандрикова Мария* (9 кл., ЦО 218, Москва), *Феклина Анастасия* (9 кл., школа 179, Москва*), Королев Андрей* (9 кл., школа 1345, Москва), *Кульчицкий Юрий* (9 кл., лицей 208, Киев), *Попов Сергей* (9 кл., ЦО 218, Москва).

Дипломами III степени награждены *Пучка Тарас* (6 кл., школа 179, Москва), *Шибанкова Екатерина* (6 кл., школа 179, Москва), *Шатский Владимир* (6 кл., гимназия 1514, Москва), *Волков Виктор* (6 кл., школа 622, Москва), *Гришутин Александр* (6 кл., школа 827, Москва), *Тукачинский Владислав* (6 кл., гимназия 1514, Москва), *Золотов Борис* (6 кл., школа 3, Гатчина), *Румянцев Влад* (6 кл., школа 179, Москва), *Семин Иван* (6 кл., школа 30, Санкт-Петербург), *Полевой Сергей* (7 кл., «Интеллектуал», Москва), *Некрасова Татьяна* (7 кл., школа 179, Москва), *Исхаков Тимур* (7 кл., ЦО 218, Москва), *Смирнова Ирина* (7 кл., лицей 17, Кострома), *Махлина Екатерина* (7 кл., гимназия 1543, Москва), *Ванчурина Антонина* (7 кл., школа 179, Москва), *Бакунов Никита* (8 кл., ФМЛ 27, Харьков), *Савостьянов Антон* (8 кл., лицей 14, Тамбов), *Уруев Андрей* (8 кл., лицей 34, Кострома), *Щербань Яков* (8 кл., школа 82, Черноголовка), *Котельникова Юлия* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Говорухин Ярослав* (8 кл., школа 179, Москва), *Добровольская Анна* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Погорелов Иван* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Попеску Андрей* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Сафронов Кирилл* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Сердюк Ярослава* (9 кл., лицей 208, Киев), *Преображенский Анатолий* (9 кл., ЦО 218, Москва).

Также многие ребята были награждены похвальными грамотами.

Отбором задач и составлением вариантов занималась методи-

Лига	*Диплом*	*Команда*	*Капитан*	*Руководитель*
Лига 9 кл.	I диплом	Сборная «Москва-Юг», Москва	Л.Синяков	Т.П.Зорина
Лига 9 кл.	II диплом	ЦО 218, Москва	А.Ефимов	А.Д.Блинков, Е.С.Горская
Лига 9 кл.	III диплом	Лицей 208, Киев	М.Чаудхари	Т.Д.Тимошкевич
Лига 8 кл.	I диплом	МММФ-8, Москва	О.Заславский	А.В.Спивак, Е.Б. Пронина
Лига 8 кл.	II диплом	«Эврика-8», Харьков	Е.Любчик	А.Л.Берштейн
Лига 8 кл.	II диплом	Гимназия 1543, Москва	М.Грачева	Т.В.Караваева, И.В.Раскина, М.А.Берштейн, А.В.Хачатурян
Лига 8 кл.	III диплом	Лицей 14, Тамбов	Т.Мукин	А.В.Бурмистрова
Лига 8 кл.	III диплом	Лицей 208, Киев	Н.Щеглов	Т.Д.Тимошкевич
Лига 7 кл.	I диплом	Школа 179, Москва	А.Ватузов	Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А.Кузнецов
Лига 7 кл.	II диплом	Кружок «Фрактал», Санкт-Петербург	Е.Цейтина	А.П.Храпкина, А.П.Погода
Лига 7 кл.	II диплом	ЦО 218, Москва	А.Зерцалов	Ю.А.Блинков, О.А.Карпов
Лига 7 кл.	III диплом	Школа 179, Москва	Е.Гаврилец	Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А.Кузнецов
Лига 7 кл.	III диплом	Гимназия 1514, Москва	И.Брауде-Золотарев	Л.О.Бычкова
Лига 6 кл.	I диплом	Гимназия 1514, Москва	В.Шатский	Л.О.Бычкова, Н.Т.Гребенник
Лига 6 кл.	II диплом	Школа 179, Москва	Т.Зайцева	Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А.Кузнецов
Лига 6 кл.	II диплом	Гимназия 1514, Москва	А.Рыбина	Л.О.Бычкова, А.Горденко
Лига 6 кл.	III диплом	Кружок «Квантик» Москва	В.Волков	И.А.Николаева
Лига 6 кл.	III диплом	сборная лицея 30 (Санкт-Петербург) и кружка ДНТТМ (Москва)	И.Семин	А.В.Садовников, Т.П.Зорина
Лига 7-8 кл.	I диплом	Гимназия 1514, Москва	Т.Григорьев	Т.В.Житникова
Лига 7-8 кл.	II диплом	Школа 179, Москва	А.Райко	Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А. Кузнецов, Т.П. Зорина
Лига 7-8 кл.	II диплом	ДНТТМ, Москва	Г.Ионица	Т.П.Зорина, А.В.Спивак
Лига 7-8 кл.	III диплом	Школа «Интеллектуал», Москва	А.Иглина	А.И.Сгибнев
Лига 7-8 кл.	III диплом	Школа 179, Москва	С.Фельдшеров	М.В.Прасолов

ческая комиссия под общим руководством А.Ва.Шаповалова. Варианты лиги 9 классов составляли М.А.Берштейн, М.В.Прасолов, А.А.Заславский, 8 классов – А.В.Хачатурян, Н.Т.Гребеник, П.В.Мартынов, 7 классов – Д.В.Прокопенко, Ю.А.Блинков, А.И.Сгибнев, 6 классов – И.В.Раскина, А.П.Пагода, Н.Л.Чернятьев, варианты лиги 7–8 классов собирали Д.А.Калинин, Э.А.Акопян. Кроме них, в методкомиссии работали А.Д.Блинков, Е.С.Горская, Т.В.Караваева, Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, О.А.Карпов.

Книги и другие призы для победителей предоставили журнал «Квант», компании «Яндекс», «ABBYY» и Фонд математического образования и просвещения.

Конечно, такой турнир должен быть представлен не только участниками и победителями. Запоминаются яркие эмоции от побед (а порой и от неудач), но остаются в памяти яркие задачи. Приведем некоторые из задач турнира. У каждой задачи указано, для каких классов она наиболее подходит, а если известно, то и автор.

Избранные задачи турнира

1 (6–8). Произведение двух последовательных натуральных чисел может оканчиваться на 1000. Например, $1000 \cdot 1001 = 1001000$ или $8999 \cdot 9000 = 8999 \cdot 9 \cdot 1000 = \ldots 1000$.

а) Может ли произведение четырех последовательных натуральных чисел оканчиваться на 1000?

б) Может ли произведение шести последовательных натуральных чисел оканчиваться на 1000?

Д.Шноль

2 (6–7). Нарисуйте 6-угольник и проведите прямую через две его вершины, которая разбивает его на два пятиугольника.

В.Гуровиц

3 (6–7). 2010 шариков раскрасили в 7 цветов радуги. На каждом шаре написали общее количество шаров такого же цвета, как и этот. Чему может быть равна сумма чисел, обратных написанным?

Г.Гальперин

4 а) (6–8) В 10 кошельках лежали монеты. Достоинства любых двух монет из одного кошелька отличались не более чем на 1 берендейку. Монеты смешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про монеты заранее ничего не знает. Он вынимает по одной монете из мешка, смотрит на нее и кладет в одну из 19 имеющихся коробок. Положив монету в коробку, потом ее уже нельзя переложить. Докажите, что Саша может действовать так, чтобы в каждой коробке достоинства любых двух монет отличались не более чем на 1 берендейку.

б) (7–8) В 10 кошельках лежали монеты так, что веса любых двух монет из одного кошелька отличались не более чем на 1 г (массы монет могут быть нецелыми). Монеты смешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про массы монет заранее ничего не знает. Он вынимает одну монету из мешка, взвешивает, затем кладет монету в одну из имеющихся 20 коробок, вынимает следующую монету и т.д. (Положив монету в коробку, потом ее уже нельзя переложить.) Докажите, что Саша может действовать так, чтобы в каждой коробке массы любых двух монет отличались не более чем на 1 г.

в) Условие задачи такое же, как в п. б), но коробок 19.

А.Шаповалов

5 (6–7). У двух восьмизначных чисел произведения цифр положительны и равны. В каждом из чисел все цифры различны. Докажите, что у этих чисел равны и суммы цифр.

А.Шаповалов

6 (8–9). а) При каком наименьшем n найдется n-угольник, который можно разрезать на 13 равных частей?

А.Заславский

б) Существуют ли три попарно не подобных треугольника, каждый из которых можно разрезать на 26 равных треугольников?

А.Заславский, Б.Френкин

7 (7–9). Даны 10 бумажных прямоугольников. Вася может разрезать не более одного из них на два меньших прямоугольника. После этого он делит прямоугольники на две группы. Всегда ли он может добиться, чтобы суммы периметров в группах были одинаковы?

А.Шаповалов

8 (6–7). Коля и Толя по очереди закрашивают по две клетки на полоске 1×2010. Коля хочет, чтобы расстояния между двумя отмеченными им за один ход клетками не повторялись. Сможет ли Толя ему помешать?

Н.Чернятьев

9 (7–8). У Саши есть 27 кусков сыра с массами 100, 200, 300, ..., 2700 граммов. Он очень хочет разложить весь сыр на кучки так, чтобы в каждой кучке был кусок, весящий столько же, сколько и все остальные куски в этой кучке вместе. Сколько кучек у него может получиться?

А.Грибалко

10 (7–8). В школе число мальчиков равно числу девочек. Ни в каком классе не учится больше, чем полшколы. Все ученики школы пришли на дискотеку. Диджей объявил белый танец. Докажите, что каждая девочка сможет пригласить мальчика из другого класса.

Фольклор

11 (8–9). Целые числа a, b, c, d удовлетворяют условию $a^3 + ba^2 + ca + d = 0$. Докажите, что число $c^2 - 4bd - 4ad$ – квадрат целого числа.

А.Хачатурян

12 (6–8). В летней школе мальчики и девочки живут в двух- и трехместных номерах (как мальчики, так и девочки занимают много и двух-, и трехместных номеров). Свободных мест нет. Посреди смены уехал один мальчик, живший в трехместном номере, а приехала новая девочка. Какое наименьшее количество школьников придется переселить, чтобы поселить девочку в трехместный номер?

В.Гуровиц

13 (7–8). Можно ли расставить в выражении $1*2*3*\ldots*100/(1*2*3*\ldots*100)$ вместо звездочек знаки умножения и деления так, чтобы полученное выражение равнялось $1/10$?

Фольклор

14 (7–9). На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1001. Двое играют в игру – по очереди стирают по одному числу, пока на доске не останется только два числа. Если одно из них делится на второе, побеждает первый, если нет – второй. Кто из игроков имеет возможность победить при любой игре противника?

А.Шаповалов

15 (6–8). Петя разбил клетчатый квадрат 7×7 на прямоугольники по границам клеток, и раскрасил прямоугольники в три цвета так, что прямоугольники одного цвета не соприкасались даже углами. Какое наибольшее число прямоугольников могло быть у Пети?

А.Шаповалов

16 (7–9). Есть $2n$ человек: n болеют за «Спартак» и n – за «Динамо». Можно спросить у любых двоих, за одну они болеют команду или за разные, и они честно ответят. Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это можно сделать?

И.Раскина

17 (7–9). Параллелограмм разбит на треугольники. Докажите, что один из них можно накрыть всеми остальными вместе.

А.Шаповалов

18 (7–9). В точном квадрате – более миллиона цифр. Какое наименьшее количество цифр может быть четными?

А.Шаповалов

19 (8–9). а) Леша говорит, что придумал квадратный трехчлен с целыми корнями. Потом он прибавил ко второму коэффициенту 2, а к свободному члену 6 и снова получил квадратный трехчлен с целыми корнями. С результатом сделал то же, снова получил квадратный трехчлен с целыми корнями и так делал 2010 раз, и все время получались целые корни. Могут ли его слова быть правдой?

б) Есть две арифметические прогрессии a_n, b_n. Известно, что при каждом n уравнение $x^2 + a_n x + b_n = 0$ имеет два корня. Докажите, что у всех этих уравнений есть общий корень.

А.Марачев, А.Заславский

20 (7–8). Всех участников турнира два раза разбивали на команды: первый раз для игры в «Абаку», второй – в «Завалинку». Размеры команд в каждой игре не обязательно одинаковы, но в каждой команде есть хотя бы один участник. Оказалось, что каждый участник играл в «Завалинку» в не меньшей по численности команде, чем в «Абаку». Докажите, что в «Абаку» играло не меньше команд, чем в «Завалинку».

А.Лебедев, А.Шаповалов

21 (8). У Ежика и Лисы есть кусочек сыра массой в целое число граммов. Они играют в шахматы. Если выигрывает Ежик, то он съедает 4 грамма, если выигрывает Лиса, то она съедает четверть оставшегося сыра. После нескольких игр осталось целое число граммов сыра, при этом Лиса и Ежик съели поровну сыра и набрали поровну очков. Сколько граммов сыра осталось?

Т.Голенищева-Кутузова, А.Хачатурян

22 (6–7). Робин-Бобин Барабек грабил 40 человек. Сначала он отобрал 6 пончиков у первого человека, разделил их на несколько одинаковых кучек и одну из кучек съел. У каждого из следующих он также отбирал по 6 пончиков, затем делил все имеющиеся к этому моменту пончики на равные кучки, одну съедал и т.д. Ограбив последнего, он разделил пончики на 6 кучек, а потом съел 6 пончиков. Сколько всего пончиков съел Робин, если до начала серии ограблений пончиков у него не было?

А.Шаповалов

23 (8–9). Есть одна монета, известно, что она – фальшивая. Есть еще девять таких же с виду монет. Как за три

(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 28)

взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, есть ли среди этих девяти монет хотя бы одна фальшивая монета? (Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже весят одинаково и тяжелее настоящих).

А.Шаповалов

24 (9). Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Еще одна окружность, проходящая через точки B и C, касается отрезка AD в точке M_{AD}. Аналогично определяются точки M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}. Докажите, что прямые $M_{AB}M_{CD}$ и $M_{AD}M_{BC}$ перпендикулярны.

А.Волчкевич, Д.Швецов

25 (9). Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка N, а на сторонах AB и BC – точки P и Q соответственно. Отрезки NP, NQ и NA делят треугольник ABC на треугольник и два четырехугольника. Оказалось, что упомянутые четырехугольники – две равные трапеции. Как относятся их основания?

А.Хачатурян

26 (8–9). Есть клетчатый бильярдный стол размером 101×99. По углам стола расположены лузы. Можно ли запустить шар таким образом, чтобы на своем пути он прошел по всем вершинам всех квадратиков сукна, расположенных внутри стола?

А.Юрков

27 (9). *Правильным маршрутом* на бесконечной клетчатой плоскости назовем маршрут ладьи, который имеет начало, не имеет конца и ровно по одному разу проходит через каждую клетку плоскости (ладья каждым ходом перемещается в соседнюю клетку по вертикали или горизонтали). Можно ли во всех клетках плоскости расставить натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз и на некотором правильном маршруте числа только возрастали, а на другом правильном маршруте все время чередовалось возрастание и убывание чисел?

Б.Френкин

28 (7–9). Петя и Вася играют на шахматной доске в следующую игру. Каждым ходом игрок выбирает некоторую свободную клетку и проводит в ней обе диагонали – одну красным цветом, другую синим. Запрещается проводить диагональ так, чтобы она имела общий конец с уже проведенной диагональю такого же цвета. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Петя. Кто из них может выигрывать, как бы не играл противник?

А.Шаповалов

29 (7–9). На клетчатой доске 8×8 часть клеток отмечена. Известно, что ладья может пройти от любой отмеченной до любой другой, не перепрыгивая через неотмеченные клетки, причем единственным маршрутом (иначе говоря, нет замкнутых маршрутов ладьи по отмеченным клеткам). Какое наибольшее число клеток может быть отмечено?

Б.Френкин

30 (9). Через вершину C ромба $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезки AB и BD в точках M и K соответственно. Окружность, проходящая через точки A, M и K, пересекает прямые BD и AD в точках P и L соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника CKP совпадает с центром описанной окружности треугольника CML.

Ю.Блинков

Публикацию подготовили Д.Калинин, А.Шаповалов

ГОЛОВОЛОМКИ

Танграм

(Начало см. на 2 странице обложки)

«Квант» уже писал о танграме в №5 за 1989 год. В этом номере мы предлагаем еще несколько заданий. Ниже вы видите 13 выпуклых многоугольников. Чтобы сложить каждый из них, потребуется весь набор из семи танов. Попробуйте сделать это. Оказывается, что другие выпуклые многоугольники из семи танов сложить невозможно. Это установили китайские математики в 1942 году.

В заключение сформулируем одну забавную задачу.

Аня подарила на Новый Год своим младшим братьям Боре и Вите по танграму. Задание для них было одно: сложить квадрат, использовав для этого все части. Через несколько дней, после многих тщетных попыток решить головоломку, Боря убедился, что из его набора это сделать невозможно. Посмотрев на Борин набор, Аня догадалась, в чем дело: она ошиблась и положила две детали не в ту коробку! В итоге одному брату достался набор из пяти частей, а второму – из девяти. Боря предложил рассказать об этом Вите, но Аня немного поразмыслила и поняла, что из Витиного набора все равно можно сложить квадрат. Так какие же части Аня упаковала неправильно?

Е.Епифанов