

Математические бои, финал

6 класс, Высшая лига

1. Маша и Медведь соскучились и одновременно вышли навстречу друг другу. За 10 минут Медведь прошёл $\frac{2}{15}$ расстояния между ними и ещё 300 метров. А Маша за полчаса прошла на 900 метров меньше, чем $\frac{1}{5}$ расстояния между ними. Через какое время после выхода они встретились?
2. Клеточный многоугольник с клетками двух цветов назовем хорошим, если в нем ровно четверть клеток – черная. Верно ли, что любой хороший квадрат 12×12 можно разрезать на 9 хороших многоугольников? (Е. Бакаев, А. Шаповалов)
3. Можно ли на гранях двух одинаковых кубиков записать числа (не обязательно натуральные) так, чтобы из них можно было составить параллелепипед $1 \times 1 \times 2$ со всевозможными натуральными суммами от 1 до 36 на видимых гранях? (А. Шаповалов)
4. Рая и Ада взяли по ленте и записали на них одно и то же натуральное число, все цифры которого разные и положительные. Каждая девочка разрезала свою ленту на сколько-то частей и сложила получившиеся числа. Разрезали они по-разному, но суммы получили одинаковые. Найдите наименьшее возможное число цифр в этом числе. (А. Грибалко)
5. Сколькими способами можно расставить по одному разу цифры от 1 до 6 на места пропусков так, чтобы не возникло математических противоречий? Окончания слов можно менять.
Однажды слоны сорвали ____ кокосов и ____ бананов, треть этих плодов съели, а остальное взяли с собой на прогулку. Каждый из этих ____ слонов нес по ____ плодов. Встретив ____ слоних, они отдали им все свои плоды. При этом каждой слонихе досталось по ____ плодов. (Е. Бакаев, Д. Шноль)
6. В одной из вершин правильного восьмиугольника сидит кролик, а в двух соседних с ним находятся волки. За один ход каждый из них должен переместиться либо в соседнюю, либо в противоположную вершину. Ходят по очереди, первый ход делает кролик, а за тем ходят оба волка. Если в какой-то момент кролик окажется в одной вершине с волком, его съедают. Волки могут находиться в одной отмеченной точке. Сможет ли кролик бегать от волков бесконечно долго, как бы они ни ходили? (А. Грибалко)
7. Винни-Пух сел на диету и каждый день ест на две банки варенья меньше и на одну банку меда больше, чем в предыдущий день. Всего за время диеты он съел 484 банки варенья и 275 банок меда. Сколько дней длилась диета? (Е. Бакаев)
8. Петя разрезал клетчатый квадрат по линиям сетки на 6 частей, из которых сложил четыре квадрата разных размеров. Какие наименьшие размеры мог иметь Петин квадрат? (Э. Акопян)

6 класс, Первая лига

1. У двух малышей есть два одинаковых набора из 36 кубиков. Вася разложил их на семь кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики одинаковые. Гена разложил свои кубики на пять кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики разные. Докажите, что кто-то из них ошибается.

2. Петя разрезал клетчатый квадрат по линиям сетки на 6 частей, из которых сложил четыре квадрата разных размеров. Какие наименьшие размеры мог иметь Петин квадрат? (Э. Акопян)

3. Винни-Пух сел на диету и каждый день ест на одну банку варенья меньше, чем в предыдущий день, зато на одну банку меда больше, чем вчера. Всего за время диеты он съел 264 банки варенья и 187 банок меда. Сколько дней длилась диета? (Е. Бакаев)

4. В одной семье были папа, мама и трое детей: Аня, Боря и Света. Некоторые дети всегда говорят правду, а остальные — всегда лгут. На празднике каждый ребенок получил некоторое количество конфет, и дети принялись их делить.

Света: «Число моих конфет делится на пять».

Аня: «Если бы Боря отдал мне все свои конфеты, то у меня число конфет делилось бы даже на двадцать пять!».

Боря: «А у меня всего 7 конфет».

Аня: «Ты сказал неправду!».

Боря: «А мы со Светой одинаковые: либо оба говорим правду, либо оба обманываем!».

Света: «Аня, не ругай Борю, у тебя же конфет на одну больше, чем у него».

На этот шум прибежал папа и сказал, что поделит конфеты на всех пятерых поровну.

Сможет ли папа выполнить свое обещание?

5. Маша и Медведь соскучились и одновременно вышли навстречу друг другу. За 10 минут Медведь прошёл $\frac{2}{15}$ расстояния между ними и ещё 300 метров. А Маша за полчаса прошла на 900 метров меньше, чем $\frac{1}{5}$ расстояния между ними. Через какое время после выхода они встретились?

6. Сколькими способами можно расставить по одному разу цифры от 1 до 6 на места пропусков так, чтобы не возникло математических противоречий? Окончания слов можно менять.

Однажды слоны сорвали ____ кокосов и ____ бананов, треть этих плодов съели, а остальное взяли с собой на прогулку. Каждый из этих ____ слонов нес по ____ плодов. Встретив ____ слоних, они отдали им все свои плоды. При этом каждой слонихе досталось по ____ плодов. (Е. Бакаев, Д. Шноль)

7. Рая и Ада взяли по ленте и записали на них одно и то же натуральное число, все цифры которого разные. Каждая девочка разрежала свою ленту на сколько-то частей и сложила получившиеся числа. Разрезали они по-разному, но суммы получили одинаковые. Найдите наименьшее возможное число цифр в этом числе. (А. Грибалко)

8. В одной из вершин правильного восьмиугольника сидит кролик, а в двух соседних с ним находятся волки. За один ход каждый из них должен переместиться либо в соседнюю, либо в противоположную вершину. Ходят по очереди, первый ход делает кролик, а за тем ходят оба волка. Если в какой-то момент кролик окажется в одной вершине с волком, его съедают. Волки могут находиться в одной отмеченной точке. Сможет ли кролик бегать от волков бесконечно долго, как бы они ни ходили? (А. Грибалко)

7 класс, Высшая лига, вариант В

1. Винни-Пух сел на диету и каждый день ест на две банки варенья меньше и на одну банку меда больше, чем в предыдущий день. Всего за время диеты он съел 484 банки варенья и 275 банок меда. Сколько дней длилась диета? (Е. Бакаев)
2. На окружности отмечены $2n$ точек, разбивающие ее на равные дуги. В одной из отмеченных точек сидит кролик, а в двух соседних находятся волки. За один ход каждый из них может переместиться либо в соседнюю, либо в противоположную отмеченную точку. Ходят по очереди, сначала кролик, а затем оба волка (волки могут находиться в одной точке). Если в какой-то момент кролик окажется в одной точке с волком, его съедают. При каких n кролик может бегать от волков бесконечно долго, как бы они ни ходили? (А. Грибалко)
3. Можно ли на гранях двух одинаковых кубиков записать числа (не обязательно целые) так, чтобы из них можно было составить параллелепипед $1 \times 1 \times 2$ с любой суммой от 1 до 36 на видимых гранях? (А. Шаповалов)
4. Клетчатый многоугольник, клетки которого раскрашены в два цвета, назовем хорошим, если в нем ровно четверть клеток черная. Верно ли, что любой хороший квадрат 12×12 можно разрезать на 9 хороших многоугольников? (Е. Бакаев, А. Шаповалов)
5. Дано натуральное число k . Какое наибольшее количество прямых можно провести на плоскости так, чтобы среди любых k из них нашлись две, образующие угол 60° ? (Уральский турнир)
6. Найдите все такие тройки натуральных чисел x, y, z , что $3^x \cdot 5^y + 1 = z(3z+2)$. (фольклор)
7. Точку внутри выпуклого n -угольника соединили отрезками со всеми вершинами, разбив тем самым исходный многоугольник на n треугольников. Оказалось, что все они равнобедренные. При каких n можно утверждать, что выбранная точка равноудалена от всех вершин многоугольника? (Е. Бакаев)
8. В треугольнике ABC угол B равен 120° , точка M — середина стороны AC . На лучах AB и CB взяты точки K и L соответственно так, что $AK = CL$ и $\angle KML = 120^\circ$. Докажите, что $KL = AM$. (Е. Бакаев)

7 класс, Высшая лига, вариант Т

1. Винни-Пух сел на диету и каждый день ест на две банки варенья меньше и на одну банку меда больше, чем в предыдущий день. Всего за время диеты он съел 484 банки варенья и 275 банок меда. Сколько дней длилась диета? (*Е. Бакаев*)
2. На окружности отмечены 30 точек, разбивающие ее на равные дуги. В одной из отмеченных точек сидит кролик, а в двух соседних находятся волки. За один ход каждый из них может переместиться либо в соседнюю, либо в противоположную отмеченную точку. Ходят по очереди, сначала кролик, а затем оба волка (волки могут находиться в одной точке). Если в какой-то момент кролик окажется в одной точке с волком, его съедают. Может ли кролик бегать от волков бесконечно долго, как бы они не ходили? (*А. Грибалко*)
3. На гранях двух одинаковых кубиков записаны натуральные числа. Петя разными способами составлял из них параллелепипед $1 \times 1 \times 2$ и каждый раз записывал сумму чисел на десяти видимых гранях параллелепипеда. Могло ли случиться, что он записал 36 последовательных чисел? (*А. Шаповалов*)
4. Клетчатый многоугольник, клетки которого раскрашены в два цвета, назовем хорошим, если в нем ровно четверть клеток черная. Верно ли, что любой хороший квадрат 12×12 можно разрезать на 9 хороших многоугольников? (*Е. Бакаев, А. Шаповалов*)
5. Какое наибольшее количество прямых можно провести на плоскости так, чтобы среди любых девяти из них нашлись две, образующие угол 60° ? (*Уральский турнир*)
6. Вася написал на доске дробь, числитель и знаменатель которой натуральны. Вслед за ней он стал выписывать новые дроби по следующему правилу: к знаменателю последней дроби прибавляется 1, она переворачивается и сокращается, если возможно. Докажите, что в какой-то момент на доске будут две одинаковые дроби. (*М. Хачатурян*)
7. Точку внутри выпуклого n -угольника соединили отрезками со всеми вершинами, разбив тем самым исходный многоугольник на n треугольников. Оказалось, что все они равнобедренные. При каких n можно утверждать, что выбранная точка равноудалена от всех вершин многоугольника? (*Е. Бакаев*)
8. Прямая разрезает равнобедренный треугольник на два равнобедренных треугольника. В каком отношении эта прямая может разделить угол треугольника? (*А. Заславский*)

8 класс, вариант В

1. В 8а, 8б, 8в классах по 30 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трех учеников найдутся двое знакомых и двое незнакомых. Докажите, что найдется ученик, который знает всех учеников в одном из двух других классов. (*Уральский турнир*)

2. В треугольнике ABC угол B равен 120° , точка M — середина стороны AC . На лучах AB и CB взяты точки K и L соответственно так, что $AK = CL$ и $\angle KML = 120^\circ$. Докажите, что $KL = AM$. (*Е. Бакаев*)

3. Клетчатый многоугольник, клетки которого раскрашены в два цвета, назовем хорошим, если в нем ровно четверть клеток чёрная. Верно ли, что любой хороший квадрат 12×12 можно разрезать на 9 хороших многоугольников? (*Е. Бакаев, А. Шаповалов*)

4. Можно ли на гранях восьми одинаковых кубиков записать числа (не обязательно натуральные) так, чтобы из этих кубиков можно было составить вдвое больший куб с любой суммой от 1 до 10000000 на видимых гранях? (*А. Шаповалов*)

5. На окружности отмечены $2n$ точек, разбивающих ее на равные дуги. В одной из отмеченных точек сидит кролик, а в двух соседних находятся волки. За один ход каждый из них может переместиться либо в соседнюю, либо в противоположную отмеченную точку. Ходят по очереди, сначала кролик, а затем оба волка (волки могут находиться в одной точке). Если в какой-то момент кролик окажется в одной точке с волком, его съедает. При каких n кролик может бегать от волков бесконечно долго, как бы они ни ходили? (*А. Грибалко*)

6. Пусть для чисел a, b и c выполнено $a \geq b \geq c > 0$. Докажите, что $\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$

(предложил П.Чулков)

7. Решите уравнение в целых числах: $14m + 7n = 5m^2 + 5mn + 5n^2$. (*предложил П.Чулков*)

8. Существует ли отличная от круга фигура, ограниченная отрезками и дугами окружностей, такая, что все отрезки, делящие пополам ее периметр, имеют одинаковые длины? (*А. Заславский*)

8 класс, вариант Т

1. В 8а, 8б, 8в классах по 20 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трех учеников найдутся двое знакомых. Докажите, что найдется ученик, у которого в каком-то классе не менее 10 знакомых. (*Уральский турнир*)

2. В треугольнике ABC угол B равен 120° , точка M — середина стороны AC . На лучах AB и CB взяты точки K и L соответственно так, что $AK = CL$ и $\angle KML = 120^\circ$. Докажите, что $KL = AM$. (*Е. Бакаев*)

3. Клетчатый многоугольник, клетки которого раскрашены в два цвета, назовем хорошим, если в нем ровно четверть клеток чёрная. Верно ли, что любой хороший квадрат 12×12 можно разрезать на 9 хороших многоугольников? (*Е. Бакаев, А. Шаповалов*)

4. Можно ли на гранях двух одинаковых кубиков записать числа (не обязательно целые) так, чтобы из них можно было составить параллелепипед $1 \times 1 \times 2$ с любой суммой от 1 до 36 на видимых гранях? (*А. Шаповалов*)

5. На окружности отмечены 8 точек, разбивающих ее на равные дуги. В одной из отмеченных точек сидит кролик, а в двух соседних находятся волки. За один ход каждый из них может переместиться либо в соседнюю, либо в противоположную отмеченную точку. Ходят по очереди, сначала кролик, а затем оба волка (волки могут находиться в одной точке). Если в какой-то момент кролик окажется в одной точке с волком, его съедают. Может ли кролик бегать от волков бесконечно долго, как бы они ни ходили? (*А. Грибалко*)

6. Пусть для чисел a , b и c выполнено $a \geq b \geq c > 0$. Докажите, что $\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$

(предложил П. Чулков)

7. Решите уравнение в целых числах: $14m + 7n = 5m^2 + 5mn + 5n^2$. (предложил П. Чулков)

8. Диагонали разрезают выпуклый четырёхугольник на подобные треугольники, причём не все они равны. Докажите, что в четырёхугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность (*Б. Френкин*)

Источник: www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html