

Математические бои, 3 тур

6 класс, Высшая лига

1. У каждого из семи гномов был кусок золота: у младшего он весил 270 г, у следующего по возрасту – 280 г, ..., у старшего – 330 г. В какой-то момент двое гномов поменялись своими кусками, но потом забыли, кто с кем менялся. На глаз различить куски гномы не могут. Как им за три взвешивания на чашечных весах определить, кто именно поменялся золотом? (А. Грибалко)
2. На девяти карточках записаны различные цифры от 1 до 9, каждая по одному разу. Требуется одну карточку (не ту, на которой 1) положить в центр, а остальные положить по кругу так, чтобы сумма любых k цифр, лежащих подряд, делилась на цифру, лежащую в центре. При каких k от 2 до 8 это задание выполнимо? (А. Блинков, И.Раскина)
3. Аня познакомилась с Борей раньше, чем с Витей и Гришей. Боря познакомился с Витей раньше, чем с Аней и Гришей. Витя познакомился с Гришей раньше, чем с Борей и с Аней. А с кем раньше познакомился Гриша: с Аней, с Борей или с Витей? (В. Гуровиц, Турнир Савина 2005)
4. На доске написано натуральное число, все цифры которого различны. Петя заметил, что если подчеркнуть любые две его соседние цифры, то подчеркнутое двузначное число либо простое, либо точный квадрат. Найдите наибольшее число, которое могло быть на доске. (М. Евдокимов)
5. Клетки доски 9×9 заполняют крестиками (из двух диагоналей) и ноликами (вписанный в клетку круг) так, чтобы нарисованные фигуры не имели общих точек. Какое наибольшее число клеток может быть заполнено? (А. Шаповалов)
6. По окончании первого полугодия Петя подсчитал, что всего успел получить за две четверти 15 оценок по музыке, причем средняя оценка за первую четверть у него равна 3,5, а за вторую четверть – 4,5. Могло ли такое быть или Петя ошибся? (А. Марачев)
7. В лесу двадцать полянок. Некоторые соединены дорожками с односторонним движением. На каждой дорожке требуется положить несколько пирожков или поставить несколько бутылочек. Проходя по дорожке, Алиса ест все лежащие на ней пирожки и выпивает содержимое всех бутылочек. От каждого пирожка её рост увеличивается на 1 см, а от каждой бутылочки – уменьшается на 1 см. Льюис хочет разложить пирожки и бутылочки так, чтобы если от одной полянки к другой можно было прийти несколькими способами, рост Алисы при путешествии изменился бы одинаково. При любом ли расположении дорожек ему удастся это сделать? (Е. Бакаев)
8. Клетки квадратной таблицы $n \times n$, лежащие не выше одной из главных диагоналей, образуют «лесенку». Найдите все $n > 2$, при которых эту фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки. (А. Грибалко)

6 класс, Первая лига

1. В лесу жили 56 зайцев, 35 лис, 24 волка и 3 медведя. Лес заколдовали, и теперь если лиса съест зайца, то превратится в волка, а если волк съест зайца, то превратится в медведя. Через год в лесу осталось только 3 зайца, зато медведей стало 33. А сколько лис? (*Матпраздник Фракталя*)

2. На девяти карточках записаны различные цифры от 1 до 9, каждая по одному разу. Одну карточку положили в центр, а остальные – вокруг неё. Оказалось, что сумма любых четырёх цифр, лежащих подряд, делится на цифру, лежащую в центре. Обязательно ли в центр положили карточку с цифрой 1? (*А. Блинков, И.Раскина*)

3. Аня познакомилась с Борей раньше, чем с Витей и Гришей. Боря познакомился с Витей раньше, чем с Аней и Гришей. Витя познакомился с Гришей раньше, чем с Борей и с Аней. А с кем раньше познакомился Гриша: с Аней, с Борей или с Витей? (*В. Гуровиц, Турнир Савина 2005*)

4. На доске написано натуральное число, все цифры которого различны. Петя заметил, что если подчеркнуть любые две его соседние цифры, то подчеркнутое двузначное число либо простое, либо точный квадрат. Найдите наибольшее число, которое могло быть на доске. (*М. Евдокимов*)

5. Клетки доски 8×8 заполняют крестиками (из двух диагоналей) и ноликами (вписанный в клетку круг) так, чтобы нарисованные фигуры не имели общих точек. Какое наибольшее число клеток может быть заполнено? (*А. Шаповалов*)

6. По окончании первого полугодия Петя подсчитал, что всего успел получить за две четверти 15 оценок по музыке, причем средняя оценка за первую четверть у него равна 3,5, а за вторую четверть – 4,5. Могло ли такое быть или Петя ошибся? (*А. Марачев*)

7. В верхней строке таблицы ведущий игры расположил цифры от 1 до 6, каждую по одному разу. За один ход игрок выбирает 4 столбца и ставит в них 4 цифры. Ведущий указывает, что именно угадал игрок в этих четырех столбцах следующим образом:

?	?	?	?	?	?
5	3	1	4		
	2	5	6	3	
		6	4	2	1

● ○ ○
● ○
○ ○ ○ ○

- ставит черный кружок за каждую цифру, которая стоит в нужной колонке, и

- ставит белый кружок за каждую цифру, которая есть в этих четырех столбцах искомой комбинации, но стоит не на своем месте.

Найдите расположение цифр в искомой комбинации.

8. Клетки квадратной таблицы 77×77 , лежащие не выше одной из главных диагоналей, образуют «лесенку». Можно ли ее разрезать на трехклеточные уголки? (*А. Грибалко*)

7 класс, Высшая лига

лига 7-8, вариант А

1. В стране между некоторыми городами осуществляются беспосадочные перелеты (рейсы односторонние). Руководство авиакомпании хочет установить цены на полёты так, чтобы если от одного города до другого можно было пролететь (с пересадками) несколькими способами, то все способы обходились бы путешественнику в одинаковую сумму. Всегда ли получится так сделать, если цена перелётов может быть любой ненулевой (в том числе отрицательной)? (*Е. Бакаев*)
2. Биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке I . Докажите, что $AI > BC$. (*фольклор*)
3. На доске написано натуральное число, все цифры которого различны. Петя заметил, что если подчеркнуть любые две его соседние цифры, то подчеркнутое двузначное число либо простое, либо точный квадрат. Найдите наибольшее число, которое могло быть на доске. (*М. Евдокимов*)
4. На девяти карточках записаны различные цифры от 1 до 9, каждая по одному разу. Требуется одну карточку (не ту, на которой 1) положить в центр, а остальные положить по кругу так, чтобы сумма любых k цифр, лежащих подряд, делилась на цифру, лежащую в центре. При каких k от 2 до 8 это задание выполнимо? (*Е. Бакаев*)
5. У каждого из семи гномов был кусок золота: у младшего он весил 270 г, у следующего по возрасту – 280 г, ..., у старшего – 330 г. В какой-то момент двое гномов поменялись своими кусками, но потом забыли, кто с кем менялся. На глаз различить куски гномы не могут. Как им за три взвешивания на чашечных весах определить, кто именно поменялся золотом? (*А. Грибалко*)
6. Рассмотрим фигуру, являющуюся объединением всех клеток квадратной таблицы $n \times n$, лежащих не выше одной из главных диагоналей. Найдите все $n > 2$, при которых эту фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки. (*А. Грибалко*)
7. У Евы есть не более 2017 кислых яблоки и k сладких. Она даёт их Адаму по очереди: сначала все кислые, затем все сладкие. Каждое яблоко, которое получает Адам, он может съесть целиком или выкинуть. Адаму известно, что сначала идут кислые яблоки, потом сладкие, а также то, что кислых яблок не более 2017, а сладких ровно k (но неизвестно точное число кислых яблок). Найдите наименьшее k , при котором Адам гарантированно может съесть больше сладких яблок, чем кислых. (*Уральский турнир*)
8. Хозяйка испекла квадратный торт и отрезала от него несколько кусков равной площади. Первый разрез проведён параллельно стороне исходного квадрата от края до края. Следующий разрез проведён в оставшейся части перпендикулярно предыдущему, далее аналогично. Могла ли оставшаяся в итоге часть пирога иметь форму квадрата? (*Б. Френкин*)

7-8 класс, вариант В

1. В стране между некоторыми городами осуществляются беспосадочные перелёты (рейсы односторонние). Руководство авиакомпании хочет установить цены на полёты так, чтобы если от одного города до другого можно было пролететь (с пересадками) несколькими способами, то все способы обходились бы путешественнику в одинаковую сумму. Всегда ли получится так сделать, если цена перелётов может быть любой ненулевой (в том числе отрицательной)? (Е. Бакаев)
2. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка D , а на стороне BC – точка E . Известно, что $AB = BC = CD$ и $AD = BD = ED$. Докажите, что AE – биссектриса треугольника ABC . (Б. Френкин)
3. На доске написано натуральное число, все цифры которого различны. Петя заметил, что если подчеркнуть любые две его соседние цифры, то подчеркнутое двузначное число либо простое, либо точный квадрат. Найдите наибольшее число, которое могло быть на доске. (М. Евдокимов)
4. На девяти карточках записаны различные цифры от 1 до 9, каждая по одному разу. Требуется одну карточку (не ту, на которой 1) положить в центр, а остальные положить по кругу так, чтобы сумма любых k цифр, лежащих подряд, делилась на цифру, лежащую в центре. При каких k от 2 до 8 это задание выполнимо? (Е. Бакаев)
5. Клетки доски 9×9 заполняют крестиками (из двух диагоналей) и ноликами (вписанный в клетку круг) так, чтобы нарисованные фигуры не имели общих точек. Какое наибольшее число клеток может быть заполнено? (А. Шаповалов)
6. Рассмотрим фигуру, являющуюся объединением всех клеток квадратной таблицы $n \times n$, лежащих не выше одной из главных диагоналей. Найдите все $n > 2$, при которых эту фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки. (А. Грибалко)
7. У Евы есть не более 2017 кислых яблок и k сладких. Она даёт их Адаму по очереди: сначала все кислые, затем все сладкие. Каждое яблоко, которое получает Адам, он может съесть целиком или выкинуть. Адаму известно, что сначала идут кислые яблоки, потом сладкие, а также то, что кислых яблок не более 2017, а сладких ровно k (но неизвестно точное число кислых яблок). Найдите наименьшее k , при котором Адам гарантированно может съесть больше сладких яблок, чем кислых. (Уральский турнир)
8. Хозяйка испекла квадратный торт и отрезала от него несколько кусков равной площади. Первый разрез проведён параллельно стороне исходного квадрата от края до края. Следующий разрез проведён в оставшейся части перпендикулярно предыдущему, далее аналогично. Могла ли оставшаяся в итоге часть пирога иметь форму квадрата? (Б. Френкин)

8 класс

1. В стране между некоторыми городами осуществляются беспосадочные перелеты (рейсы односторонние). Руководство авиакомпании хочет установить цены на полёты так, чтобы если от одного города до другого можно было пролететь (с пересадками) несколькими способами, то все способы обходились бы путешественнику в одинаковую сумму. Всегда ли получится так сделать, если цена перелётов может быть любой ненулевой? (Цена перелёта может быть отрицательной.) (Е. Бакаев)
2. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$. O – центр описанной окружности, BL – биссектриса. Описанная окружность треугольника BOL пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D . Докажите, что $BD \perp AC$. (Д. Швецов)
3. Докажите, что если $a, b, c \geq 0$, то $a\sqrt{3a^2 + 6b^2} + b\sqrt{3b^2 + 6c^2} + c\sqrt{3c^2 + 6a^2} \geq (a + b + c)^2$. (предложил П. Чулков)
4. На 1000 карточках записаны целые числа от 0 до 999, каждое по одному разу. Требуется одну карточку (не ту, на которой 0 или 1) положить в центр, а остальные положить по кругу так, чтобы сумма любых k чисел, лежащих подряд, делилась на число, лежащее в центре. При скольких различных k от 2 до 998 это задание выполнимо? (Е. Бакаев)
5. На плоскости провели несколько прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, и отметили все точки пересечения. Докажите, что отмеченные точки можно покрасить в три цвета так, что на каждой проведенной прямой любые две соседние отмеченные точки будут покрашены в разные цвета. (фольклор)
6. Рассмотрим фигуру, являющуюся объединением всех клеток квадратной таблицы $n \times n$, лежащих не выше одной из главных диагоналей. Найдите все $n > 2$, при которых эту фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки. (А. Грибалко)
7. Точка M – середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к AM пересекает катет AB в точке P , а серединный перпендикуляр к CM пересекает катет CB в точке Q . Найдите $\angle PQC$, если $\angle A = \alpha$. (Е. Бакаев)
8. У Евы есть не более 2017 кислых яблоки и k сладких. Она даёт их Адаму по очереди: сначала все кислые, затем все сладкие. Каждое яблоко, которое получает Адам, он может съесть целиком или выкинуть. Адаму известно, что сначала идут кислые яблоки, потом сладкие, а также то, что кислых яблок не более 2017, а сладких ровно k (но не известно точное число кислых яблок). Найдите наименьшее k , при котором Адам гарантированно может съесть больше сладких яблок, чем кислых. (Уральский турнир)

Источник: www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html