Турнир им. А.П.Савина, 2017 год

Математические бои, 2 тур

6 класс, Высшая лига

1. По траве вереницей вплотную друг за другом ползут сороконожки. Длина каждой сороконожки — 10 сантиметров. В 12-00 сороконожки подползли к дорожке длиной 1 метр. Как только сороконожка поставит все 40 ножек на дорожку, она начинает ползти со скоростью 15 см/сек, а пока хотя бы одна её ножка на траве, она ползёт в 3 раза медленнее. Ровно в 12-01 последняя сороконожка сползла с дорожки и поставила свою последнюю ножку на травку. Сколько было сороконожек?

2. Каждая клетка квадрата 9x9 покрашена в один из двух цветов – черный или белый. Одним ходом разрешается выбрать любой прямоугольник 1x5 или 1x7 со сторонами, идущими по границам клеток, и перекрасить каждую из его клеток в противоположный цвет. Верно ли, что для любой исходной раскраски всю доску можно сделать белой с помощью нескольких таких ходов? (*Е. Бакаев, И.Раскина, М.Артемьев*)

3. Пятнадцать детей стоят по кругу. Справа от каждого мальчика стоит ребенок в синей футболке, а слева – ребенок в красной футболке. Каково наибольшее возможное количество мальчиков в круге? (*Е. Бакаев, Б.Френкин*)

4. Каждую сторону правильного треугольника разделили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные сторонам треугольника. Получилась треугольная сетка из маленьких правильных треугольничков. Можно ли исходный треугольник разрезать по линиям сетки на n равных фигур при каком-нибудь n>100? (*М. Евдокимов*)

5. В трех корзинах лежат пирожки: 20 в первой, 1 – во второй и 7 – в третьей. Петя и Вася играют по следующим правилам. За один ход нужно взять два пирожка из любой корзины, один из них съесть, а второй переложить в другую корзину. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. Кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто из ребят может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Грибалко*)

6. Пять человек играют в мафию. Среди них два мафиози, два мирных жителя и комиссар. Мафиози знают только друг друга, комиссар знает роль каждого, каждый мирный житель знает только свою собственную роль. Комиссар и мирные жители говорят правду. Мафиози всегда лгут. Играющие сказали следующее (в указанном порядке):

Первый: я не знаю, кто мафиози.

Второй: я не знаю, кто из нас мирные жители.

Третий: я не знаю, кто комиссар.

Четвёртый: я не знаю, кто комиссар.

Для кого из играющих можно точно определить их роли? (*Д. Шноль*)

7. На всех шести гранях кубика расставлены числа от 1 до 6 по одному разу. Назовем вершину троечницей, если в ней сходятся три грани, сумма чисел на которых кратна трем. Сколько вершин-троечниц может оказаться у кубика? (*Е. Бакаев*)

8. Петя написал несколько различных натуральных чисел с суммой 100, используя только две различные цифры. Какое наибольшее количество чисел могло быть у Пети? (*Е. Бакаев, Н.Чернятьев*)

6 класс, Первая лига

1. По траве вереницей вплотную друг за другом ползут сороконожки. Длина каждой сороконожки — 10 сантиметров. В 12-00 сороконожки подползли к дорожке длиной 1 метр. Как только сороконожка поставит все 40 ножек на дорожку, она начинает ползти со скоростью 15 см/сек, а пока хотя бы одна её ножка на траве, она ползёт в 3 раза медленнее. Ровно в 12-01 последняя сороконожка сползла с дорожки и поставила свою последнюю ножку на травку. Сколько было сороконожек?

2. Каждая клетка квадрата 10x10 покрашена в один из двух цветов — черный или белый. Одним ходом разрешается выбрать любой прямоугольник 1x5 или 1x3 со сторонами, идущими по границам клеток, и перекрасить каждую из его клеток в противоположный цвет. Докажите, что при любой исходной раскраске всю доску можно сделать белой с помощью нескольких таких ходов. (*Е. Бакаев*)

3. Пятнадцать детей стоят по кругу. Справа от каждого мальчика стоит ребенок в синей футболке, а слева – ребенок в красной футболке. Каково наибольшее возможное количество мальчиков в круге? (*Е. Бакаев, Б.Френкин*)

4. Каждую сторону правильного треугольника разделили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные сторонам треугольника. Получилась треугольная сетка из маленьких правильных треугольничков. Можно ли исходный треугольник разрезать по линиям сетки на n равных фигур при каком-нибудь $n>4$? (*М. Евдокимов*)

5. В двух корзинах лежат пирожки: 20 – в первой и 22 – во второй. Петя и Вася играют по следующим правилам. За один ход нужно взять два пирожка из любой корзины, один из них съесть, а второй переложить в другую корзину. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. Кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто из ребят может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Грибалко*)

6. Пять человек играют в мафию. Среди них два мафиози, два мирных жителя и комиссар. Мафиози знают только друг друга, комиссар знает роль каждого, каждый мирный житель знает только свою собственную роль. Комиссар и мирные жители говорят правду. Мафиози всегда лгут. Играющие сказали следующее (в указанном порядке):

Первый: я не знаю, кто мафиози.

Второй: я не знаю, кто из нас мирные жители.

Третий: я не знаю, кто комиссар.

Четвёртый: я не знаю, кто комиссар.

Для кого из играющих можно точно определить их роли? (Д. *Шноль*)

7. Никита 23 апреля сказал: «Сегодня разность между числом прожитых мною полных месяцев и числом полных лет впервые стала равна 111». Когда у Никиты день рождения?

8. Петя написал несколько различных натуральных чисел с суммой 92, используя только две различные цифры. Какое наибольшее количество чисел могло быть у Пети? (*Е. Бакаев, Н.Чернятьев*)

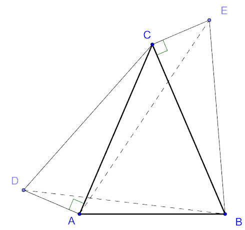
7 класс, Высшая лига

1. Каждую сторону правильного треугольника разделили на *n* равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные сторонам треугольника. Получилась треугольная сетка из маленьких правильных треугольничков. Можно ли исходный треугольник разрезать по линиям сетки на *n* равных фигур при каком-нибудь n>1000? (*М. Евдокимов*)

2. Каждая клетка квадрата nхn покрашена в один из двух цветов – черный или белый. Одним ходом разрешается выбрать любой прямоугольник 1х5 или 1х7 со сторонами, идущими по границам клеток, и перекрасить каждую из его клеток в противоположный цвет. При каких натуральных *n* можно гарантировать, что всю доску получится сделать белой с помощью нескольких таких ходов? (*Е. Бакаев, И.Раскина, М.Артемьев*)

3. В трех корзинах лежат пирожки: 20 в первой, 1 – во второй и 7 – в третьей. Петя и Вася играют по следующим правилам. За один ход нужно взять два пирожка из любой корзины, один из них съесть, а второй переложить в другую корзину. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. Кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто из ребят может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Грибалко*)

4. На сторонах *AC* и *BC* равнобедренного треугольника *ABC* как на катетах построены вовне равные прямоугольные треугольники *ADC* и *CEB* (см. рис.). Докажите, что из отрезков *BD, AE* и *BC* можно сложить треугольник. (*А. Пешнин*)



5. В вершинах 6-угольника написали 6 различных натуральных чисел, не превосходящих 15. На сторонах и главных диагоналях 6-угольника написали произведения чисел, стоящих в их концах. Сумма всех 15 написанных чисел равна 300. Какие числа могли быть написаны в вершинах? (*методкомиссия по фольклорным мотивам*)

6. Из бумаги вырезали 5 попарно различных треугольников. Могло ли оказаться, что среди этих треугольников есть хотя бы один непрямоугольный, а каждые два из них можно склеить по стороне так, что получится треугольник (треугольники разрешается переворачивать)? (*А. Грибалко*)

7. Каждый житель острова людоедов принадлежит к одному из двух племён — рыцарей, которые всегда говорят правду, или лжецов, которые всегда лгут. Однажды 2017 островитян встали в круг и каждый заявил: «Оба моих соседа — лжецы». Тут началась перебранка, и одного из островитян съели. После этого оставшиеся 2016 островитян снова встали в круг, возможно, в другом порядке, и каждый заявил: «Оба моих соседа не из моего племени». Кого съели — рыцаря или лжеца? (*Уральский турнир*)

8. Петя написал несколько различных натуральных чисел с суммой 100, используя только две различные цифры. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя? (*Е. Бакаев, Н.Чернятьев*)

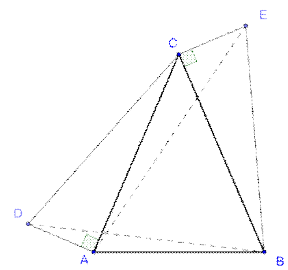
7-8 класс

1. Каждую сторону правильного треугольника разделили на *n* равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные сторонам треугольника. Получилась треугольная сетка из маленьких правильных треугольничков. Можно ли исходный треугольник разрезать по линиям сетки на *n* равных фигур при каком-нибудь *n*>100? (*М. Евдокимов*)

2. Каждая клетка квадрата 8х8 покрашена в один из двух цветов – черный или белый. Одним ходом разрешается выбрать любой прямоугольник 1х5 или 1х7 со сторонами, идущими по границам клеток, и перекрасить каждую из его клеток в противоположный цвет. При каких натуральных *n* можно гарантировать, что всю доску получится сделать белой с помощью нескольких таких ходов? (*Е. Бакаев, И.Раскина, М.Артемьев*)

3. В двух корзинах лежат пирожки: 20 в первой, 22 – во второй. Петя и Вася играют по следующим правилам. За один ход нужно взять два пирожка из любой корзины, один из них съесть, а второй переложить в другую корзину. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. Кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто из ребят может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Грибалко*)

4. На сторонах *AC* и *BC* равнобедренного треугольника *ABC* как на катетах построены вовне равные прямоугольные треугольники *ADC* и *CEB* (см. рис.). Докажите, что из отрезков *BD, AE* и *BC* можно сложить треугольник. (*А. Пешнин*)



5. В вершинах шестиугольника написаны шесть различных натуральных чисел, не превосходящих 15. На сторонах и главных диагоналях шестиугольника написали произведения чисел, стоящих в их концах. Сумма всех пятнадцати написанных чисел равна 300. Какие числа могли быть написаны в вершинах. (*Е. Бакаев*)

6. Биссектриса *BD* треугольника *ABC* отсекает от него равнобедренный треугольник *BCD*, а биссектриса *CE* отсекает от *ABC* тупоугольный равнобедренный треугольник АСЕ. Найдите углы треугольника *ABC.* (*А.Блинков*)

7. Пятнадцать детей стоят по кругу. Справа от каждого мальчика стоит ребенок в синей футболке, а слева – ребенок в красной футболке. Каково наибольшее возможное количество мальчиков в круге? *(Е. Бакаев, Б.Френкин)*

8. Петя написал несколько различных натуральных чисел с суммой 100, используя только две различные цифры. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя? (*Е. Бакаев, Н.Чернятьев*)

8 класс

1. В вершинах шестиугольника написаны шесть различных натуральных чисел, не превосходящих 15. На сторонах и главных диагоналях шестиугольника написали произведения чисел, стоящих в их концах. Сумма всех пятнадцати написанных чисел равна 300. Какие числа могли быть написаны в вершинах. (*По мотивам фольклора*)

2. В остроугольном треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Внутри треугольника выбрана точка P так, что $\angle APM = \angle A$, $\angle CPN = \angle C$. Докажите, что $\angle APC = 2\angle B$. (*Е. Бакаев*)

3. В трех корзинах лежат пирожки: 20 в первой, 1 – во второй и 7 – в третьей. Петя и Вася играют по следующим правилам. За один ход нужно взять два пирожка из любой корзины, один из них съесть, а второй переложить в другую корзину. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. Кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто из ребят может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Грибалко*)

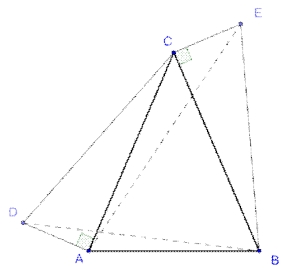
4. Из бумаги вырезали несколько попарно различных треугольников. Могло ли оказаться, что среди этих треугольников есть хотя бы один непрямоугольный, а каждые два из них можно склеить по стороне так, что получится треугольник (треугольники разрешается переворачивать)? (*А. Грибалко*)

5. Каждая клетка квадрата nxn покрашена в один из двух цветов – черный или белый. Одним ходом разрешается выбрать любой прямоугольник 1x5 или 1x7 со сторонами, идущими по границам клеток, и перекрасить каждую из его клеток в противоположный цвет. При каких натуральных n можно гарантировать, что всю доску получится сделать белой с помощью нескольких таких ходов? (*Е. Бакаев, И.Раскина, М.Артемьев*)

6. Каждый житель острова людоедов принадлежит к одному из двух племён — рыцарей, которые всегда говорят правду, или лжецов, которые всегда лгут. Однажды 2017 островитян встали в круг и каждый заявил: «Оба моих соседа — лжецы». Тут началась перебранка, и одного из островитян съели. После этого оставшиеся 2016 островитян снова встали в круг, возможно, в другом порядке, и каждый заявил: «Оба моих соседа не из моего племени». Кого съели — рыцаря или лжеца? (*Уральский турнир*)

7. Найдите все такие четверки чисел $a \geq b \geq c \geq d$, что: $a+b+c+d=8$, $ab+cd=10$, $ac+bd=5$, $ad+bc=2$. *(Предложил П.Чулков)*

8. На сторонах AC и BC равнобедренного треугольника ABC как на катетах построены вовне равные прямоугольные треугольники ADC и CEB (см. рис.). Докажите, что из отрезков BD, AE и BC можно сложить треугольник. (*А. Пешнин*)



Источник: **www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html**