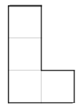
Турнир им. А.П.Савина, 2017 год

Математические бои, 1 тур

6 класс, Высшая лига

1. Некоторый шестиугольник, все стороны которого разной длины, разрезали на равносторонние треугольники. Какое наименьшее количество треугольников могло получиться? (*Е. Бакаев*)



2. В квадрате 12x12 все клетки белые. Какое наименьшее количество клеток можно закрасить черным цветом так, чтобы из квадрата нельзя было вырезать полностью белый четырехклеточный уголок (как на рисунке)? (*Е. Бакаев*)

3. Один из трех журналистов получил премию. Известно, что один из них всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий может говорить и правду, и ложь. Каждый из них на вопрос «Это Вы получили премию?" ответил "Нет". Затем в том же порядке каждого из них спросили "Верен ли Ваш предыдущий ответ?" и все ответили "Да". Наконец, в том же порядке каждого спросили "Верен ли ответ предыдущего человека?" и все ответили "Нет". Можно ли наверняка определить, кто получил премию? (*В. Мазорчук, 27 Уральский турнир*)

4. Великан сделал табуретку, у которой все ножки получились разной длины. Он решил отпилить кусок от самой длинной ножки, чтобы подровнять ее с самой короткой, но ошибся и отпилил на 50 см больше, чем надо. Пытаясь повторить эту операцию, от отпилил на 49 см больше, чем надо, затем на 48 и т.д., пока, наконец, не отпилил столько, сколько хотел. Сколько после этого надо отпилить кусков и какой длины, чтобы все ножки стали одинаковыми? (*А. Заславский*)

5. Петя и Вася играют в такую игру. Петя пишет на доске единицу, Вася приписывает к ней слева или справа двойку, затем Петя приписывает к полученному числу слева или справа тройку и т.д. Последним ходом Петя приписывает к текущему числу слева или справа девятку. Если полученное девятизначное число кратно 11, то побеждает Петя, иначе побеждает Вася. Кто из них может победить, как бы ни играл соперник? *(А. Грибалко)*

6. На доске написаны числа от 1 до 100. Каждым действием выбирают какие-то два числа на доске и вместо них записывают наименьший простой делитель их суммы. Через 99 действий осталось одно число. Каким может быть это число? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

7. На кружок ходят 10 ребят. Известно, что какие бы 4 из них ни пришли на занятие, их можно посадить за две парты так, что за каждой партой сидят друзья. Докажите, что среди этих десяти ребят можно выбрать четырех, каждый из которых дружит с остальными тремя.

8. Аня, Боря и Вася несколько раз бежали наперегонки. После каждого забега прибежавший первым получал три очка, вторым – два очка, а третьим – одно очко. По итогам всех забегов ребята получили поровну очков. Известно, что Боря прибегал раньше Ани 17 раз, а раньше Васи 12 раз. Сколько было забегов?

6 класс, Первая лига

1. Один из трех журналистов получил премию. Известно, что один из них всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий может говорить и правду, и ложь. Каждый из них на вопрос «Это Вы получили премию?" ответил "Нет". Затем в том же порядке каждого из них спросили "Верен ли Ваш предыдущий ответ?" и все ответили "Да". Наконец, в том же порядке каждого спросили "Верен ли ответ предыдущего человека?" и все ответили "Нет". Можно ли наверняка определить, кто получил премию? (*В. Мазорчук, 27 Уральский турнир*)

2. Великан сделал табуретку, у которой все ножки получились разной длины. Он решил отпилить кусок от самой длинной ножки, чтобы подровнять ее с самой короткой, но ошибся и отпилил на 50 см больше, чем надо. Пытаясь повторить эту операцию, от отпилил на 49 см больше, чем надо, затем на 48 и т.д., пока, наконец, не отпилил столько, сколько хотел. Сколько после этого надо отпилить кусков и какой длины, чтобы все ножки стали одинаковыми? (*А. Заславский*)

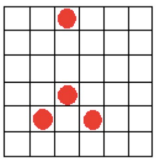
3. На доске написаны числа от 1 до 100. Каждым действием выбирают какие-то два числа на доске и вместо них записывают наименьший простой делитель их суммы. Через 99 действий осталось одно число. Каким может быть это число? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

4. Аня, Боря и Вася несколько раз бежали наперегонки. После каждого забега прибежавший первым получал три очка, вторым – два очка, а третьим – одно очко. По итогам всех забегов ребята получили поровну очков. Известно, что Боря прибегал раньше Ани 17 раз, а раньше Васи 12 раз. Сколько было забегов?

5. Тридцать детей играли за круглым столом. Очередной игрок добавляет в кучу на середине стола 10 орехов из мешка и кидает игральный кубик с числами от 2 до 7 на его гранях. Если общее число орехов в куче делится на выпавшее число, он съедает из кучи соответствующую часть орехов (например, треть, если выпала тройка), иначе не ест ничего. Известно, что последний в круге выбросил семёрку и съел 7 орехов. Сколько всего орехов съели дети, если до первого хода в куче было 77 орехов? (*А. Шаповалов*)

6. На кружок ходят Петя и еще 9 ребят. Известно, что какие бы 4 из них ни пришли на занятие, их можно посадить за две парты так, что за каждой партой сидят друзья. Докажите, что на этот кружок ходит не меньше 7 петиных друзей.

7. Можно ли разрезать квадрат на рисунке на 4 равные фигуры по линиям сетки так, чтобы в каждой фигуре было по одному кружочку? (*Я. Дрокин*)

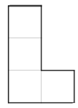


8. Существует ли шестиугольник, все стороны которого разной длины, который можно разрезать на три равносторонних треугольника? (*Е. Бакаев*)

7 класс, Высшая лига

1. Шестиугольник, все стороны которого разной длины, разрезали на равные треугольники. Какое наименьшее количество треугольников могло получиться? (*Е. Бакаев*)

2. Какое наименьшее число клеток необходимо отметить в клетчатом квадрате 99 × 99, чтобы не нашлось четырехклеточного уголка (см. рис.), состоящего целиком из неотмеченных клеток? (*Е. Бакаев*)



3. На доске выписаны натуральные числа 1, 2…, *n*. Рассмотрим следующую операцию: стираются два произвольных числа, а вместо них на доску выписывается наименьший простой делитель их суммы. Операция проводится до тех пор, пока на доске не останется одно число. Найдите наименьшее возможное n, при котором оставшимся числом может быть число 97. (*Жаутыковская олимпиада*)

4. Петя и Вася играют в такую игру. Петя пишет на доске единицу, Вася приписывает к ней слева или справа двойку, затем Петя приписывает к полученному числу слева или справа тройку и т.д. Последним ходом Петя приписывает к текущему числу слева или справа девятку. Если полученное девятизначное число кратно 11, то побеждает Петя, иначе побеждает Вася. Кто из них может победить, как бы ни играл соперник? (*А. Грибалко*)

5. Найдите все тройки целых чисел a, b, c такие, что $a^2 + 2b = 8$; $b^2 + 2c = 9$; $c^2 + 2a = 19$ (*фольклор*)

6. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка K так, что $AC=BC=BK$. Из точки K опустили перпендикуляр к BC, который поделил ABC на две части. У какой из частей (треугольной или четырехугольной) периметр больше? (*Е. Бакаев*)

7. В конференции участвовало 16 человек. Каждый день некоторые из них читали доклад. По окончании конференции оказалось, что для каждых двух участников одного пола были два дня, в которые они оба читали доклады, но при этом ни для каких трех участников такие два дня указать нельзя. Докажите, что конференция длилась не меньше 12 дней. (*А. Грибалко*)

8. Аня, Боря и Вася несколько раз бежали наперегонки. После каждого забега прибежавший первым получал три очка, вторым – два очка, а третьим – одно очко. По итогам всех забегов ребята получили поровну очков. Известно, что Боря прибегал раньше Ани 17 раз, а раньше Васи 12 раз. Сколько было забегов?

7-8 класс

1. Некоторый шестиугольник, все стороны которого разной длины, разрезали на равносторонние треугольники. Какое наименьшее количество треугольников могло получиться? (*Е. Бакаев*)

2. Какое наименьшее число клеток необходимо отметить в клетчатом квадрате 300×300, чтобы не нашлось четырехклеточного уголка (см. рис.), состоящего целиком из неотмеченных клеток? (*Е. Бакаев*)

3. На доске выписаны натуральные числа 1, 2, … 100. Рассмотрим следующую операцию: стираются два произвольных числа, а вместо них на доску выписывается наименьший простой делитель их суммы. Операция проводится до тех пор, пока на доске не останется одно число. Каким может быть это число? (*Жаутыковская олимпиада, упрощение*)

4. Петя и Вася играют в такую игру. Петя пишет на доске единицу, Вася приписывает к ней слева или справа двойку, затем Петя приписывает к полученному числу слева или справа тройку и т.д. Последним ходом Петя приписывает к текущему числу слева или справа девятку. Если полученное девятизначное число кратно 11, то побеждает Петя, иначе побеждает Вася. Кто из них может победить, как бы ни играл соперник? (*А. Грибалко*)

5. Найдите все тройки целых чисел a, b, c такие, что

$a^2 + 2b = 8$; $b^2 + 2c = 9$; $c^2 + 2a = 19$ (*фольклор*)

6. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка K так, что $AC=BC=BK$. Из точки K опустили перпендикуляр к BC, который поделил ABC на две части. У какой из частей (треугольной или четырехугольной) периметр больше? (*Е. Бакаев*)

7. На кружок ходят 10 ребят. Известно, что какие бы 4 из них ни пришли на занятие, их можно посадить за две парты так, что за каждой партой сидят друзья. Докажите, что среди этих десяти ребят можно выбрать четырех, каждый из которых дружит с остальными тремя. *(Методкомиссия по мотивам фольклора)*

8. Аня, Боря и Вася несколько раз бежали наперегонки. После каждого забега прибежавший первым получал три очка, вторым – два очка, а третьим – одно очко. По итогам всех забегов ребята получили поровну очков. Известно, что Боря прибегал раньше Ани 17 раз, а раньше Васи 12 раз. Сколько было забегов?

8 класс

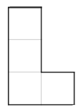
1. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC; BL - биссектриса треугольника ABC; O_A - центр описанной окружности треугольника AIL; O_C - центр описанной окружности треугольника CIL. Докажите, что прямая AC касается описанной окружности треугольника O_ALO_C. (*Д.Швецов*)

2. Аня, Боря, Вася и Гриша несколько раз бегали наперегонки. После каждого забега прибежавший первым получал четыре очка, вторым – три очка, третьим – два очка, а четвертым – одно очко. Известно, что Боря прибегал раньше Ани 20 раз, раньше Васи 1 раз, а раньше Гриши 7 раз. Могли ли по итогам всех забегов ребята получить поровну очков?

3. В конференции участвовало 8 мужчин и 8 женщин. Каждый день некоторые из них читали доклад. По окончании конференции оказалось, что для каждых двух участников одного пола были два дня, в которые они оба читали доклады, но при этом ни для каких трех участников такие два дня указать нельзя. Докажите, что конференция длилась не меньше 14 дней. (*А. Грибалко*)

4. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка K так, что $AC=BC=BK$. Через точку K провели перпендикуляр к BC, который поделил ABC на две части. У какой из частей (треугольной или четырехугольной) периметр больше? (*Е. Бакаев*)

5. Какое наименьшее число клеток необходимо отметить в клетчатом квадрате 99×99, чтобы не нашлось четырехклеточного уголка (см. рис.), состоящего целиком из неотмеченных клеток? (*Е. Бакаев*)



6. На стене в ряд расположены несколько переключателей. Каждый может находиться в одном из четырех положений: влево, вправо, вверх или вниз. Если какие-то три переключателя подряд находятся в трех разных положениях, сумасшедший электрик переключает их в четвертое положение. Докажите, что он не может делать это бесконечно долго. (*Уральский турнир*)

7. Положительные числа a и b таковы, что $a+b=ab.$ Докажите, что $\frac{a}{b^2+4}+\frac{b}{a^2+4}\geq\frac{1}{2}$. (*предложил П.Чулков*)

8. Шестиугольник, все стороны которого разной длины, разрезали на равные треугольники. Какое наименьшее количество треугольников могло получиться? (*Е. Бакаев*)

Источник: **www.ashap.info/Turniriy/Savin/index.html**