

Личная олимпиада

6 класс

- 6.1. Знак числа.** Среди чисел $a+b$, $a-b$, ab и $\frac{a}{b}$ – два положительных и два отрицательных. Какой знак у числа b ? (Б.Френкин)
- 6.2. Домино.** Можно ли на доску размером 6×6 положить 16 доминошек (прямоугольников размером 2×1) так, чтобы никакие две из них не образовывали ни квадрат 2×2 , ни прямоугольник 4×1 ? (М.Евдокимов)
- 6.3. Камни.** По кругу лежат 4 камня. Известно, что вес одного из них равен сумме весов двух его соседей. Можно ли найти этот камень за два взвешивания на чашечных весах без гирь? (А.Шаповалов)
- 6.4. Стеклотара.** Граждане выстроились в очередь в пункт приёма стеклотары. У стоящих перед Петром в совокупности 25 бутылок, а у стоящих за ним – 15. У стоящих перед Василием в совокупности 17 бутылок, а у стоящих за ним – 19. У Петра и Василия вместе 12 бутылок. Сколько бутылок у гражданина, стоящего перед Петром? (Граждан без бутылок в очереди нет.) (И.Раскина)
- 6.5. Не касаются квадраты.** Каждая грань кубика размером $2 \times 2 \times 2$ разбита на четыре квадрата 1×1 . Какое наибольшее количество квадратов можно закрасить так, чтобы они не соприкасались даже углами? (А.Шаповалов)
- 6.6. 2017.** В ряд записаны цифры: одна единица, две двойки, три тройки и четыре четверки. Расставьте между некоторыми цифрами знаки арифметических действий так, чтобы значение полученного выражения стало равно 2017. (А.Заславский)
- 6.7. Числа на карточках.** Трём математикам выдали по карточке, на каждой из которых записано число, и сообщили, что числа на карточках натуральные, попарно различные и их сумма равна 28. Каждый математик знает свое число, но не знает остальные числа. После этого между ними произошел следующий разговор.
Первый: «Я знаю, что у кого-то из вас простое число».
Второй: «А я знаю, какие числа у каждого из вас».
Третий: «Я тоже знаю ваши числа».
Определите и вы, какие числа были написаны на карточках. (А.Грибалко)
- 6.8. Игра с квадратом.** Петя и Вася играют с клетчатым квадратом размером 2017×2017 по следующим правилам: сначала Петя делит квадрат по линии сетки одним прямолинейным разрезом на две части, а Вася выбирает из них одну часть (другая выбрасывается) и режет её аналогичным образом на две части. Затем Петя из этих частей выбирает одну и режет, и так далее. Тот, кто не сможет сделать очередной ход – проигрывает. Кто из них сможет выиграть, независимо от того, как будет играть соперник? (Я.Дрокин)
- 6.9. Турнир.** В школьном турнире по настольному теннису каждый сыграл с каждым один раз. Каждую встречу судил один из остальных участников, и каждый участник судил одинаковое количество встреч. Докажите, что судей можно было распределить так, чтобы каждый участник судил ровно одну встречу каждого другого. (Б.Френкин)
-

7 класс

7.1. Оценка за четверть. За контрольную можно получить одну из оценок: «2», «3», «4» или «5». Оценка за четверть равна среднему арифметическому восьми оценок за контрольные работы, округленному до ближайшего целого числа по правилам округления (например, 2,5 округляется до «3»). По результатам четверти у Васи выходила оценка «3». Вася утверждает, что он сможет переписать три контрольные так, чтобы получить за четверть оценку «5». Может ли это быть правдой? (*М.Евдокимов*)

7.2. Разбиение треугольника. Прямая разбила треугольник на меньший треугольник, подобный исходному (*углы этих треугольников соответственно равны*), и четырехугольник, симметричный относительно своей диагонали. Докажите, что исходный треугольник – прямоугольный. (*А.Шаповалов*)

7.3. Цвета соседок. Тридцать принцесс сидят по пятеро вокруг шести круглых столов, и у каждой пары соседок платья разного цвета. Всегда ли их можно рассадить по трое вокруг десяти круглых столиков так, чтобы по-прежнему у каждой пары соседок были платья разного цвета? (*А.Шаповалов*)

7.4. Обыкновенные числа. Назовем число «обыкновенным», если его можно представить в виде суммы двух чисел, каждое из которых получается из него перестановкой цифр. Является ли «обыкновенным» число 9876543? (*Я.Дрокин*)

7.5. На пять равнобедренных. Равносторонний треугольник разрезали на пять равнобедренных треугольников. Обязательно ли все углы получившихся треугольников измеряются целым числом градусов? (*А.Шаповалов*)

7.6. Мальчики и девочки. По кругу стоят 25 детей. Каждого из них спросили: «Сколько твоих соседей одного с тобой пола?». Известно, что 8 детей ответили: «2», 8 ответили: «1», 8 ответили: «0». Что ответил 25-й ребенок? (*А.Шаповалов*)

7.7. Катер и лодка. Из A в B против течения отплыл катер, а через некоторое время из B навстречу ему начала двигаться лодка. Они встретились, когда катер прошел $\frac{4}{5}$ пути до B . Доплыв до B , катер развернулся и догнал лодку, затратив на это после выхода из B $\frac{3}{5}$ времени, которое требуется ему на весь путь из B в A . Через какое время после катера приплывёт в A лодка, если на весь путь катер затратил 10 часов? (*Я.Дрокин*)

7.8. Острый угол. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H , K – середина отрезка CH . Докажите, что угол AKB – острый. (*А.Блинков, А.Заславский*)

7.9. Турнир. В однокруговом футбольном турнире участвовало $n > 2$ команд (победа – 3 очка, ничья – 1 очко, поражение – 0). Оказалось, что все команды, кроме команды «Козлы», набрали одинаковое количество очков, причем «Козлы» не со всеми командами сыграли одинаково. Найдите наименьшее значение n , если известно, что «Козлы» заняли последнее место. (*А.Блинков*)

8 класс

8.1. Оценка за четверть. За контрольную можно получить одну из оценок: «2», «3», «4» или «5». Оценка за четверть равна среднему арифметическому девяти оценок за контрольные работы, округленному до ближайшего целого числа по правилам округления (например, 2,5 округляется до «3»). По результатам четверти у Васи выходила оценка «3». Вася утверждает, что он сможет переписать три контрольные так, чтобы получить за четверть оценку «5». Может ли это быть правдой? (*М.Евдокимов*)

8.2. Середины. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно, E – середина MN , F – середина BE , G – середина AF , H – середина GE . Найдите расстояние от H до AD . (*М.Волчкевич*)

8.3. Цвета соседок. Двадцать принцесс сидят по пятеро вокруг четырех круглых столов, и у каждой пары соседок платья разного цвета. Докажите, что их можно пересадить за пять круглых столов по четверо так, чтобы по-прежнему у каждой пары соседок были платья разного цвета. (*А.Шаповалов*)

8.4. Обыкновенные числа. Назовем число «обыкновенным», если его можно представить в виде суммы двух чисел, каждое из которых получается из него перестановкой цифр. Является ли «обыкновенным» число $2^{2017} + 1$? (*Я.Дрокин*)

8.5. На пять не подобных. Можно ли равносторонний треугольник разрезать на пять равнобедренных треугольников, среди которых нет подобных? (*М.Панов*)

8.6. Мальчики и девочки. По кругу стоят 25 детей. Каждого из них спросили: «Сколько твоих соседей одного с тобой пола?». Известно, что 8 детей ответили: «2», 8 ответили: «1», 8 ответили: «0». Что ответил 25-й ребенок? (*А.Шаповалов*)

8.7. Катер и лодка. Из A в B против течения отплыл катер, а через некоторое время из B навстречу ему начала двигаться лодка. Они встретились, когда катер прошел $\frac{4}{5}$ пути до B . Доплыв до B , катер развернулся и догнал лодку, затратив на это после выхода из B $\frac{3}{5}$ времени, которое требуется ему на весь путь из B в A . Через какое время после катера приплывёт в A лодка, если на весь путь катер затратил 10 часов? (*Я.Дрокин*)

8.8. Полупериметр. В треугольнике ABC на стороне AB и на продолжении стороны BC за точку C отмечены точки E и F соответственно так, что $AE = CF = AC$. Прямые EC и AF пересекаются в точке D , H – основание перпендикуляра, опущенного из D на прямую AC . Докажите, что длина AH равна полупериметру треугольника ABC . (*М.Волчкевич*)

8.9. Турнир. В однокруговом футбольном турнире участвовало $n > 2$ команд (победа – 3 очка, ничья – 1 очко, поражение – 0). Оказалось, что все команды, кроме команды «Козлы», набрали одинаковое количество очков, причем «Козлы» не со всеми командами сыграли одинаково. Найдите наименьшее значение n , если известно, что «Козлы» заняли последнее место. (*А.Блинков*)