Турнир им. А.П.Савина, 2016 год

Математические бои, 3 тур

6 класс, Высшая лига

1. Начав с некоторого натурального числа, Петя каждым шагом увеличивает или уменьшает его на какую-нибудь из его цифр (возможно, на цифру 0), строго чередуя сложение и вычитание. Первая операция — сложение. Из какого наименьшего натурального числа Петя может так получить 218? (*А.Шаповалов*)

2. Учеников в классе вдвое больше, чем парт. Если всех девочек посадить с мальчиками, то не менее чем за половиной парт окажутся мальчик с девочкой. А чтобы хватило мест за партами всем девочкам, достаточно использовать не более четверти всех парт. Во сколько раз мальчиков больше, чем девочек? (*Д.Калинин*)

3. Решите ребус: $\frac{9}{ЭТО}=\frac{13}{РЕШИ}=\frac{6}{САМ}$. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.)

4. Волк пригласил к себе в гости трех поросят и Красную Шапочку смотреть мультики. После просмотра волк пересчитал кексы на кухне и заметил, что двух не хватает. Как волку за два взвешивания определить, кто съел кексы? У Волка есть чашечные весы без гирь, на чаши которых он может помещать кексы, поросят, Красную Шапочку. Все кексы весят одинаково, все поросята в момент прихода в гости — тоже. Также известно, что Красная Шапочка на диете, поэтому могла съесть не более 1 кекса.

5. На шахматной доске 31 клетка испачкана смолой. Докажите, что на чистые клетки можно поставить пять не бьющих друг друга ладей. (*Е.Бакаев*)

6. За круглым столом сидят тринадцать социологов, некоторые из которых всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Социологи играют в игру «Опрос общественного мнения». Игра длится тринадцать раундов. В первом раунде каждый спрашивает соседа слева, правда ли, что 2•2=4. В каждом следующем раунде каждый социолог спрашивает своего соседа слева, получил ли он в предыдущем раунде ответ "да". Сколько ответов «нет» могло прозвучать в последнем раунде?

7. При каких n на плоскости можно расположить n точек и соединить их отрезками так, чтобы из каждой точки выходило по 3 отрезка и никакие из отрезков не пересекались?

8. Великаны Петя и Вася делят стопудовый кусок сыра. Сначала Петя делит кусок на две произвольные части. Затем Вася делит на две части одну из них. Потом снова одну из частей делит Петя. После этого Петя забирает себе все куски, весящие целое число пудов, а Вася — остальные. Какой наибольший вес может гарантировать себе Петя, как бы ни действовал Вася? (*А.Шаповалов*)

6 класс, Первая лига

1. Начав с некоторого натурального числа, Петя каждым шагом увеличивает или уменьшает его на какую-нибудь из его цифр (возможно, на цифру 0), строго чередуя сложение и вычитание. Первая операция — сложение. Из какого наименьшего натурального числа Петя может так получить 218? (*А.Шаповалов*)

2. Учеников в классе вдвое больше, чем парт. Если всех девочек посадить с мальчиками, то не менее чем за половиной парт окажутся мальчик с девочкой. А чтобы хватило мест за партами всем девочкам, достаточно использовать не более четверти всех парт. Во сколько раз мальчиков больше, чем девочек? (*Д.Калинин*)

3. Саша перемножил несколько первых натуральных чисел, а Маша перемножила несколько первых простых чисел. Оказалось, что Сашино и Машино числа состоят из одного и того же набора цифр. Найдите эти числа.

4. Волк пригласил к себе в гости трех поросят и Красную Шапочку смотреть мультики. После просмотра волк пересчитал кексы на кухне и заметил, что двух не хватает. Как волку за два взвешивания определить, кто съел кексы? У Волка есть чашечные весы без гирь, на чаши которых он может помещать кексы, поросят, Красную Шапочку. Все кексы весят одинаково, все поросята в момент прихода в гости — тоже. Также известно, что Красная Шапочка на диете, поэтому могла съесть не более 1 кекса.

5. На шахматной доске сорок семь клеток испачканы смолой. Докажите, что на чистые клетки можно поставить три не бьющие друг друга ладьи. (*Е.Бакаев*)

6. На острове сто жителей, каждый из которых является рыцарем или лжецом. Каждому из них задали вопрос "Сколько рыцарей среди твоих друзей на острове?", и в качестве ответов были получены все целые числа от 0 до 99. Сколько рыцарей живет на острове? (*А.Грибалко*)

7. При каких n на плоскости можно расположить n точек и соединить их отрезками так, чтобы из каждой точки выходило по 3 отрезка и никакие из отрезков не пересекались?

8. Великаны Петя и Вася делят стопудовый кусок сыра. Сначала Петя делит кусок на две произвольные части. Потом Вася делит на две части одну из них. После этого Петя забирает себе все куски, весящие целое число пудов, а Вася — остальные. Какой наибольший вес может гарантировать себя Петя, как бы ни действовал Вася? (*А.Шаповалов*)

7 класс, Высшая лига

1. На гранях куба записаны числа (не обязательно положительные, не обязательно целые). Для каждой тройки граней с общей вершиной одно из чисел на этих гранях равно сумме двух других. Обязательно ли среди чисел есть равные? (*А.Шаповалов*)

2. Минимальный делитель натурального числа (но больший единицы) равен a Максимальный делитель этого числа (но меньший его самого) равен a^2+2. Каким может быть это число?

3. Начав с некоторого натурального числа, Петя каждым шагом увеличивает или уменьшает его на какую-нибудь из его цифр (возможно, на цифру 0), строго чередуя сложение и вычитание. Первая операция — сложение. Из какого наименьшего натурального числа Петя может так получить 2016? (*А.Шаповалов*)

4. Какое наименьшее количество полей шахматной доски нужно испачкать смолой, чтобы на чистые клетки нельзя было поставить пять не бьющих друг друга ладей? (*Е.Бакаев*)

5. Великаны Петя и Вася делят стопудовый кусок сыра. Сначала Петя делит кусок на две меньшие части, потом Вася одну из частей делит на две части и наконец Петя снова делит одну из частей на две меньшие части. После этого Петя забирает себе все куски, весящие целое число пудов, а Вася — остальные. Какой наибольший вес может гарантировать себя Петя, как бы ни действовал Вася? (*А.Шаповалов*)

6. За круглым столом сидят сто социологов, некоторые из которых всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Социологи играют в игру «Опрос общественного мнения». Игра длится сто раундов. В первом раунде каждый социолог спрашивает соседа слева, правда ли, что 2•2=4. В каждом следующем раунде каждый социолог спрашивает своего соседа слева, получил ли он в предыдущем раунде ответ "да". В последнем раунде социолог Иван Иванович получил ответ «нет». А сколько ещё ответов «нет» звучало во время игры?

7. В равнобедренном треугольнике ABC (с основанием AC) на стороне AB отметили точку K такую, что угол ACK в 4 раза меньше угла ABC. Докажите, что BC + BK = 2BM, где BM - медиана треугольника ABC. (*Е.Бакаев*)

8. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбрали соответственно точки M и N и провели отрезки AN, BM и MN. Треугольник разбился на пять меньших треугольников. Могут ли наборы углов во всех этих треугольниках быть одинаковыми? (*А.Шаповалов*)

7-8 класс

1. На гранях куба записаны числа (не обязательно положительные, не обязательно целые). Для каждой тройки граней с общей вершиной одно из чисел на этих гранях равно сумме двух других. Докажите, что среди чисел есть равные. (*А.Шаповалов*)

2. Минимальный делитель натурального числа (но больший единицы) равен a Максимальный делитель этого числа (но меньший его самого) равен a^2+2. Каким может быть это число?

3. Начав с некоторого натурального числа, Петя каждым шагом увеличивает или уменьшает его на какую-нибудь из его цифр (возможно, на цифру 0), строго чередуя сложение и вычитание. Первая операция — сложение. Из какого наименьшего натурального числа Петя может так получить 2016? (*А.Шаповалов*)

4. На шахматной доске 31 клетка испачкана смолой. Докажите, что на чистые клетки можно поставить пять не бьющих друг друга ладей. (*Е.Бакаев*)

5. Великаны Петя и Вася делят стопудовый кусок сыра. Сначала Петя делит кусок на две меньшие части, потом Вася одну из частей делит на две части и наконец Петя снова делит одну из частей на две меньшие части. После этого Петя забирает себе все куски, весящие целое число пудов, а Вася — остальные. Какой наибольший вес может гарантировать себя Петя, как бы ни действовал Вася? (*А.Шаповалов*)

6. Решите ребус $\frac{9}{ЭТО}=\frac{13}{РЕШИ}=\frac{6}{САМ}$ (Одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные – разные.)

7. В равнобедренном треугольнике ABC (с основанием AC) на стороне AB отметили точку K такую, что угол ACK в 4 раза меньше угла ABC. Докажите, что BC + BK = 2BM, где BM - медиана треугольника ABC. (*Е.Бакаев*)

8. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбрали соответственно точки M и N и провели отрезки AN, BM и MN. Треугольник разбился на пять меньших треугольников. Могут ли наборы углов во всех этих треугольниках быть одинаковыми? (*А.Шаповалов*)

8 класс

1. В прямоугольнике ABCD точки M и N - середины сторон AB и CD. На отрезках AM, MB, CN, ND, MC и MD как на диаметрах построили окружности. Докажите, что есть окружность касающаяся их всех. (*А.Акопян*)

2. В школьном турнире по настольному теннису было 2n участников. Каждый играл с каждым один раз, и каждую встречу судил один из остальных участников. Ни один судья не судил какого-либо игрока более чем дважды. Докажите, что найдётся не менее двух игроков, у каждого из которых хотя бы раз повторился судья (возможно у каждого свой). (*Б.Френкин*)

3. Дана бесконечная последовательность из натуральных чисел, в которой каждое число, начиная со второго, равно количеству делителей предыдущего (включая само это число и единицу). В последовательности есть хотя бы четыре попарно различных числа, но нет двух полных квадратов подряд. Докажите, что она содержит степень четвёрки. (*Б.Френкин*)

4. Дан параллелограмм ABCD, на диагонали AC взята точка O, BO пересекает отрезок CD в точке B_1, прямая параллельная AB и проходящая через O пересекает AD в точке M, а BC в точке H. Оказалось, что BMB_1H – вписанный. Докажите, что BM перпендикулярна AB_1. (*П.Рябов*)

5. За круглым столом сидят сто социологов, некоторые из которых всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Социологи играют в игру «Опрос общественного мнения». Игра длится сто раундов. В первом раунде каждый социолог спрашивает соседа слева, правда ли, что 2•2=4. В каждом следующем раунде каждый социолог спрашивает своего соседа слева, получил ли он в предыдущем раунде ответ "да". В последнем раунде социолог Иван Иванович получил ответ «нет». А сколько ещё ответов «нет» звучало во время игры?

6. Какое наименьшее количество полей шахматной доски нужно закрасить, чтобы на не закрашенные клетки нельзя было поставить 5 не бьющих друг друга ладей? (*Е.Бакаев*)

7. Найдите все пары различных чисел a и b такие, что одновременно выполнены равенства $a^{200}-b^{200}=a-b$ и $a^{100}-b^{100}=a-b$.

8. Начав с некоторого натурального числа, Петя каждым шагом увеличивает или уменьшает его на какую-нибудь из его цифр (возможно, на цифру 0), строго чередуя сложение и вычитание. Первая операция — сложение. Из какого наименьшего натурального числа Петя может так получить 2016? (*А.Шаповалов*)

Источник: **www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html**