Турнир им. А.П.Савина, 2015 год

Командная олимпиада

Условия

6 класс

Задача 1. Можно ли на клетчатую доску размером 4×5 поставить ферзя, двух коней и двух ладей так, чтобы каждая фигура била ровно одну другую и была побита ровно одной другой? (*А.Шаповалов*)

Задача 2. Фрекен Бок испекла пирожки с малиной, с клубникой, со сгущенкой и с картошкой. Каждый третий пирожок среди всех — это пирожок с малиной, а каждый третий пирожок среди пирожков с ягодами — это пирожок с клубникой. Пирожков с картошкой было в три раза меньше, чем сладких пирожков. Каких пирожков было больше: с клубникой или со сгущенкой? **(***Д.Шноль***)**

Задача 3. Сколько несократимых среди дробей $\frac{1}{1002}, \frac{2}{1003}, \frac{3}{1004}, \ldots \frac{1014}{2015}$? **(***фольклор***)**

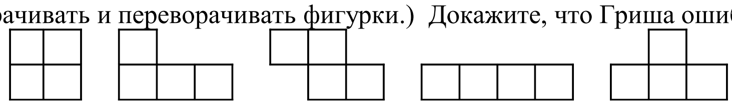
Задача 4. В комнате находились Белоснежка и семь гномов (каждый из них, в том числе и Белоснежка, либо лжец, либо рыцарь). Первой вышла Белоснежка и сказала: "Среди гномов рыцарей больше, чем лжецов". Затем из комнаты по очереди вышли шесть гномов, и каждый сказал: “Верно ровно одно из двух: либо все оставшиеся в комнате лжецы, либо Белоснежка – лжец”. Сколько рыцарей было в комнате первоначально? **(***Г.Жуков, И.Раскина***)**

Задача 5. В классе 20 человек. У Леши 8 друзей среди одноклассников, а у каждого из остальных ребят не менее 9. Если кто-то в этом классе узнает новость, он сообщает ее всем своим друзьям. Леша узнал новость. Докажите, что через некоторое время ее будет знать весь класс. **(***А.Шаповалов***)**

Задача 6. Оля написала в ряд несколько цифр. Даша переписала Олины цифры, но каждую написала подряд дважды. Каждая из девочек поставила между некоторыми цифрами знаки аврифметических действий так, что у обеих получилось 2015. Могло ли так быть, что ни одна из девочек не ошиблась, если известно, что знаков они поставили поровну ? **(***А.Заславский***)**

Задача 7. В лотерее 39 шаров, пронумерованных от 1 до 39. Играющий заполняет карточку, где указывает 6 номеров. В розыгрыше лотереи номера шести шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек можно заполнить так, чтобы среди них с гарантией нашлась выигравшая? **(**39-*й Уральский турнир***)**

Задача 8. Гриша сказал, что составил прямоугольник из пяти видов фигурок-тетраминошек (см. рис), использовав нечётное число фигурок каждого вида. (Гриша мог поворачивать и переворачивать фигурки.) Докажите, что Гриша ошибся. (*Е.Бакаев*)



7 класс

Задача 1. Можно ли на клетчатую доску размером 4×5 поставить ферзя, двух коней и двух ладей так, чтобы каждая фигура била ровно одну другую и была побита ровно одной другой? (*А.Шаповалов*)

Задача 2. На плоскости проведено несколько прямых. Всегда ли можно отметить две точки так, чтобы они оказались по разные стороны от каждой прямой? (*Е.Бакаев*)

Задача 3. Сколько несократимых среди дробей $\frac{1}{1002}, \frac{2}{1003}, \frac{3}{1004}, \dots \frac{1014}{2015}$? **(***фольклор***)**

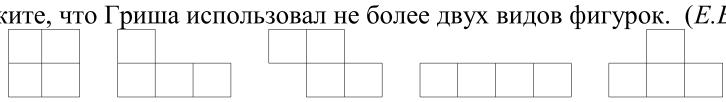
Задача 4. В комнате находились Белоснежка и семь гномов (каждый из них, в том числе и Белоснежка, либо лжец, либо рыцарь). Первой вышла Белоснежка и сказала: "Среди гномов рыцарей больше, чем лжецов". Затем из комнаты по очереди вышли шесть гномов, и каждый сказал: “Верно ровно одно из двух: либо все оставшиеся в комнате лжецы, либо Белоснежка --- лжец”. Сколько рыцарей было в комнате первоначально?
(*Г.Жуков, И.Раскина***)**

Задача 5. Учитель записал на трёх листах бумаги одинаковые примеры на сложение натуральных чисел. В каждом слагаемом он использовал только цифры 1, 2 и 3, и при этом не было слагаемых, состоящих из одинаковых цифр. Учитель раздал листки трём ученицам. Каждая вычеркнула на своём листке цифры какого-то одного вида: Ева – все единицы, Даша – все двойки, Таня – все тройки. То, что получилось, каждая девочка без ошибок вычислила. Могли ли все три результата оказаться одинаковыми? **(***А.Шаповалов***)**

Задача 6. Точки A, B, C, D расположены на плоскости так, что $BC+BD=AC=AD$ и $\angle ACB=60°$. Чему может быть равен угол *ADB? (Е.Бакаев)*

Задача 7. В лотерее 39 шаров, пронумерованных от 1 до 39. Играющий заполняет карточку, где указывает 6 номеров. В розыгрыше лотереи номера шести шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек можно заполнить так, чтобы среди них с гарантией нашлась выигравшая? **(**39-*й Уральский турнир***)**

Задача 8. Гриша сказал, что составил прямоугольник из пяти видов фигурок-тетраминошек (см. рис), причём каждый из видов либо вообще не использовался, либо был использован нечётное количество раз. (Фигурки он мог поворачивать и переворачивать.) Докажите, что Гриша использовал не более двух видов фигурок. (*Е.Бакаев*)



8 класс

Задача 1. Можно ли на клетчатую доску размером 6×3 поставить ферзя, двух коней и двух ладей так, чтобы каждая фигура била ровно одну другую и была побита ровно одной другой? (*А.Шаповалов*)

Задача 2. На плоскости дано конечное число полуплоскостей. Всегда ли можно отметить две точки так, что в каждой полуплоскости окажется ровно одна отмеченная точка? (*Е.Бакаев*)

Задача 3. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ такова, что $a_1 = a_{2015}$ и для всех $n = 1, 2, \ldots, 2014$ выполняется равенство $a_n + a_{n+1} = a_{n+1}^2 + 1$. Найдите a_{1000}. (*А.Блинков*)

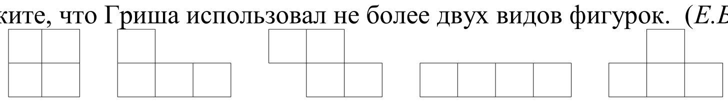
Задача 4. В квадрате со стороной 10 клеток Андрей перечеркнул поперёк общую сторону каждой пары соседних клеток маленькой стрелочкой. Все вертикальные стрелочки он направил вниз, а горизонтальные направил как попало. Обязательно ли удастся записать в клетках числа от 1 до 100 так, чтобы для каждой пары соседних чисел стрелка указывала бы направление от большего числа к меньшему? (*А.Солынин*)

Задача 5. Несколько различных натуральных чисел, произведение которых – точный квадрат, выписаны в порядке возрастания. Первое число равно 1001. Найдите минимально возможное при этих условиях последнее число в списке. **(***УТЮМ-2008***)**

Задача 6. Точки *A*, *B*, *C*, *D* расположены на плоскости так, что *BC*+*BD*=*AC*=*AD* и ∠*ACB*=60°. Чему может быть равен угол *ADB? (Е.Бакаев)*

Задача 7. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников *ACB* и *ACD* касаются между собой тогда и только тогда, когда ∠*DAB*=90°. (*А.Иванов*)

Задача 8. Гриша сказал, что составил прямоугольник из пяти видов фигурок-тетраминошек (см. рис), причём каждый из видов либо вообще не использовался, либо был использован нечётное количество раз. (Фигурки он мог поворачивать и переворачивать.) Докажите, что Гриша использовал не более двух видов фигурок. (*Е.Бакаев*)



9 класс

Задача 1. Докажите, что при $a, b, c \geq 1$ справедливо неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \leq abc+\frac{1}{abc}+1$. (*Д. Аубекеров*)

Задача 2. Несколько прямых (никакие две из которых не параллельны друг другу) делят плоскость на части. В одной из частей (неограниченной) отмечена точка *A*. Докажите, что на плоскости найдётся такая точка *B*, что *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях относительно каждой из прямых. (*А.Заславский, Е.Бакаев*)

Задача 3. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ такова, что $a_1=a_{2015}$ и для всех $n=1,2,\ldots,2014$ выполняется равенство $a_n+a_{n+1}=a_{n+1}^2+1$. Найдите a_{1000}. (*А.Блинков*)

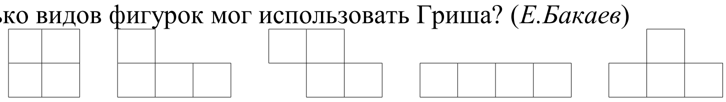
Задача 4. В квадрате 10×10 клеток Андрей для каждой пары соседних клеток перечеркнул поперёк их общую сторону маленькой стрелочкой. Все вертикальные стрелочки он направил вниз, а горизонтальные направил как попало. Обязательно ли удастся записать в клетках числа от 1 до 100 так, чтобы для каждой пары соседних чисел стрелка указывала бы направление от большего числа к меньшему? (*А.Солынин*)

Задача 5. Несколько различных натуральных чисел, произведение которых – точный квадрат, записаны в порядке возрастания. Первое число равно 1001. Найдите минимально возможное при этих условиях последнее число в списке. (*УТЮМ-2008*)

Задача 6. На стороне *BC* параллелограмма *ABCD* нашлась такая точка *K*, что $\angle KAB=\angle DAC$ и *KA*=*KD*. Найдите *BD* : *AB*. (*А.Заславский*)

Задача 7. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников *ACB* и *ACD* касаются между собой тогда и только тогда, когда $\angle DAB=90°$. (*А.Иванов*)

Задача 8. Гриша сказал, что составил прямоугольник из пяти видов фигурок-тетраминошек (см. рис), причём каждый из видов либо вообще не использовался, либо был использован нечётное количество раз. (Фигурки он мог поворачивать и переворачивать.) Сколько видов фигурок мог использовать Гриша? (*Е.Бакаев*)



Источник: www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html