Турнир им. А.П. Савина, 2015 г.
Четвертый тур.

6 класс. Финал В

1. Фома и Ерема украли 60 алмазов. Ерема предложил, что он разделит их на пять непустых кучек, а Фома выберет из них любые три. Если общее количество алмазов, взятых Фомой, будет кратно числу оставшихся алмазов, то вся добыча достанется Ереме. А если не будет, то Фоме. Кому достанутся алмазы, если Фома согласится? (*Фольклор*)

2. Перед Фомой и Ерёмой лежат на столе 100 яблок известных масс. Сначала Фома берёт со стола указанное Еремой яблоко и кладет в корзину себе или Ерёме. Каждое следующее яблоко выбирает и кладёт в одну из корзин по своему выбору тот, кому досталось предыдущее. Как только в одной корзине окажется 50 яблок, остальные кладутся в другую корзину. Докажите, что при такой делёжке Фома сможет получить яблок по весу не меньше Ерёмы. (*А. Шаповалов и жюри*)

3. Пяти мудрецам принесли шесть колпаков: два желтых, два красных и два зеленых. Мудрецов построили в затылок друг другу и надели двум первым красные колпаки, третьему и четвертому желтые, пятому зеленый, а второй зеленый спрятали. Каждый мудрец видит колпаки всех стоящих перед ним, но не видит ни своего колпака, ни колпаков стоящих сзади. Затем по очереди, начиная со стоящего позади всех, стали спрашивать каждого, какого цвета на нем колпак. Если мудрец наверняка может определить цвет своего колпака, он называет его, если нет, то отвечает «Не знаю». Сколько мудрецов смогут определить цвет своего колпака? (*по мотивам К.Кнопа*)

4. Пони и ослик бегают с постоянными скоростями по кругу длиной 100м. Пони каждые 2 минуты обгонял ослика. Когда ослик вдвое увеличил скорость, он сам стал каждые 2 минуты обгонять пони. С какими скоростями бегали пони и ослик изначально? **(***С.Берлов, 37 Уральский турнир***)**

5. Существует ли натуральное число, у которого все цифры различны и каждая равна остатку от деления этого числа на сумму остальных цифр? (*А. Шаповалов*)

6. Можно ли нарисовать шесть отрезков так, чтобы каждый пересекал (по внутренним точкам) ровно четыре других отрезка? (*Фольклор*)

7. В теннисном турнире в один круг, приняли участие 8 девушек (то есть каждая теннисистка сыграла с каждой другой ровно 1 раз, ничьих в теннисе не бывает). Оксана заняла второе место по набранным очкам, и такое количество очков не набрала больше ни одна другая участница. Сколько игр могла проиграть Алеся, которая победила в этом турнире? (*55-я Всеукраинская олимпиада юных математиков, Богдан Р.*)

8. На каждой клетке клетчатой доски стоит по гному – лжецу или рыцарю. Соседями считаются гномы в клетках с общей стороной. Какое наибольшее число гномов на шахматной доске могли бы сказать фразу «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей»? (*А. Шаповалов*)

6 класс. Финал Б

1. Фома и Ерема украли 60 алмазов. Ерема предложил, что он разделит их на пять непустых кучек, а Фома выберет из них любые три. Если общее количество алмазов, взятых Фомой, будет кратно числу оставшихся алмазов, то вся добыча достанется Ереме. А если не будет, то Фоме. Кому достанутся алмазы, если Фома согласится? (*Фольклор*)

2. Перед Фомой и Ерёмой лежат на столе 100 яблок известных масс. Сначала Фома берёт со стола указанное Еремой яблоко и кладет в корзину себе или Ерёме. Каждое следующее яблоко выбирает и кладёт в одну из корзин по своему выбору тот, кому досталось предыдущее. Как только в одной корзине окажется 50 яблок, остальные кладутся в другую корзину. Докажите, что при такой делёжке Фома сможет получить яблок по весу не меньше Ерёмы. (*А. Шаповалов и жюри*)

3. Пяти мудрецам принесли шесть колпаков: два желтых, два красных и два зеленых. Мудрецов построили в затылок друг другу и надели каждому по колпаку, а шестой колпак спрятали. Каждый мудрец видит колпаки всех стоящих перед ним, но не видит ни своего колпака, ни колпаков стоящих сзади. Затем по очереди, начиная со стоящего позади всех, стали спрашивать каждого, какого цвета на нем колпак. Если мудрец наверняка может определить цвет своего колпака, он называет его, если нет, то отвечает «Не знаю». Мудрец Фома, стоявший позади Еремы, верно определил цвет своего колпака. Можно ли утверждать, что и Ерема теперь определит цвет своего колпака? (*по мотивам К.Кнопа*)

4. У каждого из пяти детей было по 4 конфеты. Каждую минуту один из детей платит в кассу столько рублей, у скольких детей конфет не меньше, чем у него, а затем съедает одну свою конфету. Сколько денег может оказаться в кассе, когда все конфеты будут съедены? (*Е. Бакаев*)

5. Существует ли натуральное число, у которого все цифры различны и каждая равна остатку от деления этого числа на сумму остальных цифр? (*А. Шаповалов*)

6. В теннисном турнире в один круг, приняли участие 8 девушек (то есть каждая теннисистка сыграла с каждой другой ровно 1 раз, ничьих в теннисе не бывает). Оксана заняла второе место по набранным очкам, и такое количество очков не набрала больше ни одна другая участница. Сколько игр могла проиграть Алеся, которая победила в этом турнире? (*55-я Всеукраинская олимпиада юных математиков, Богдан Р.*)

7. Любые два натуральных числа от 1 до 100 включительно соединены стрелкой, ведущей от меньшего числа к большему. Как раскрасить эти стрелки в красный и синий цвета так, чтобы любой одноцветный путь проходил не более, чем по девяти стрелкам? (*40-й Уральский турнир*)

8. На каждой клетке шахматной доски стоит по гному – лжецу или рыцарю. Соседями считаются гномы в клетках с общей стороной. Каждый гном сказал фразу «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей». Каково наибольшее возможное число рыцарей? (*А. Шаповалов*)

6 класс. Финал А

1. Фома и Ерема украли 444 алмаза. Ерема предложил, что он разделит их на пять непустых кучек, а Фома выберет из них любые три. Если общее количество алмазов, взятых Фомой, будет кратно числу оставшихся алмазов, то вся добыча достанется Ереме. А если не будет, то Фоме. Кому достанутся алмазы, если Фома согласится? (*Фольклор*)

2. Два старателя делят золотой песок. Сначала Ерема делит его на 50 кучек и раскладывает их в ряд. Затем Фома берёт самую левую кучку и пересыпает в мешочек себе или Ерёме. Каждую следующую в ряду кучку берёт и пересыпает в один из мешочков тот, кому досталась предыдущая. Как только один получит 25 кучек, остальные отдаются другому. Сможет ли Ерема получить больше половины золота независимо от действий Фомы? (*А. Шаповалов и жюри*)

3. Пяти мудрецам принесли шесть колпаков: два желтых, два красных и два зеленых. Мудрецов построили в затылок друг другу и надели каждому по колпаку, а шестой колпак спрятали. Каждый мудрец видит колпаки всех стоящих перед ним, но не видит ни своего колпака, ни колпаков стоящих сзади. Затем по очереди, начиная со стоящего позади всех, стали спрашивать каждого, какого цвета на нем колпак. Если мудрец наверняка может определить цвет своего колпака, он называет его, если нет, то отвечает «Не знаю». Мудрец Фома, стоявший позади Еремы, верно определил цвет своего колпака. Можно ли утверждать, что и Ерема теперь определит цвет своего колпака? (*по мотивам К.Кнопа*)

4. У каждого из 16 детей было по 8 конфет. Каждую минуту один из детей платит в кассу столько рублей, у скольких детей конфет не меньше, чем у него, а затем съедает одну свою конфету. Сколько денег может оказаться в кассе, когда все конфеты будут съедены? (*Е. Бакаев*)

5. Существует ли натуральное число, у которого все цифры различны и каждая равна остатку от деления этого числа на сумму остальных цифр? (*А. Шаповалов*)

6. Дима сложил из синих и желтых кубиков $1\times1\times1$ куб $4\times4\times4$. Кубики каждого цвета образуют связные фигуры, равные друг другу. Какова максимальная возможная площадь поверхности одной такой фигуры? (*Д.Калинин*)

7. Любые два натуральных числа от 1 до 100 включительно соединены стрелкой, ведущей от меньшего числа к большему. Как раскрасить эти стрелки в красный и синий цвета так, чтобы любой одноцветный путь проходил не более, чем по девяти стрелкам? (*40-й Уральский турнир*)

8. На каждой клетке шахматной доски стоит по гному – лжецу или рыцарю. Соседями считаются гномы в клетках с общей стороной. Каждый гном сказал фразу «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей». Каково наибольшее возможное число рыцарей? (*А. Шаповалов*)

7-8 класс. 4-й тур

1. На шахматную доску поставили 4 коня. Доказать, что можно найти пару не побитых конями клеток с общей стороной (клетка, на которой стоит конь, *не считается* побитой). (*А. Солынин*)

2. На кружке **у**чительница дала детям задание придумать два таких треугольника, чтобы углы в них измерялись целым числом градусов, а в записи всех шести углов каждая цифра использовалась не более одного раза. Известно, что все дети справились с заданием, при этом у каждых двоих получились разные наборы углов. Какое наибольшее количество детей могло присутствовать на кружке? (*А. Грибалко*)

3. Перед Фомой и Ерёмой лежат на столе $2n$ яблок известных масс. Сначала Фома берёт самое левое яблоко и кладет в корзину себе или Ерёме. Каждое следующее яблоко берет слева и кладёт в одну из корзин по своему выбору тот, кому досталось предыдущее. Как только в одной корзине окажется n яблок, остальные кладутся в другую корзину. Докажите, что при такой делёжке Фома всегда сможет получить яблок по весу не меньше Ерёмы. **(***А. Шаповалов***)**

4. На каждой клетке шахматной доски стоит по гному – лжецу или рыцарю. Соседями считаются гномы в клетках с общей стороной. Каждый гном сказал фразу «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей». Каково наибольшее возможное число рыцарей? (*А. Шаповалов*)

5. Придумайте три фигуры, из которых можно сложить как круг, так и квадрат (фигуры могут перекрываться, но и круг, и квадрат должны быть без дыр) (*Т. Казицына*)

6. Дан угол AOC, равный 45°. $ABCD$ - квадрат, причем B ближе к O, чем D. Из точек A и C восставлены перпендикуляры к сторонам угла, пересекающие другие стороны угла в точках $A1$, $C1$. Докажите, что $A1$, $C1$ и D лежат на одной прямой. (*Д.Мухин*)

7. На доске написано несколько натуральных чисел. Каждую минуту Егор выбирает какое-нибудь число и записывают на листок бумаги сумму всех остальных чисел, после чего выбранное число уменьшает на 1. Когда все числа на доске станут нулями, Егор сложит все числа на листке. Докажите, что сумма чисел, которая у него получится, не зависит от порядка, в котором он будет выбирать числа. (*Е. Бакаев*)

8. Найдите все тройки простых чисел p, q, r, для которых найдутся целые m и n такие, что $p+q=r^m$ и $p–q=r^n$. (*20-й Уральский турнир*)

7 класс, высшая лига, 4-й тур

1. Какое минимальное число коней можно поставить на шахматную доску так, чтобы в каждой паре клеток с общей стороной хотя бы одна клетка была побита? (Клетка, на которой стоит конь, *не считается* побитой). (*А. Солынин, А.Грибалко*)

2. На кружке **у**чительница дала детям задание придумать два таких треугольника, чтобы углы в них измерялись целым числом градусов, а в записи всех шести углов каждая цифра использовалась не более одного раза. Известно, что все дети справились с заданием, при этом у каждых двоих получились разные наборы углов. Какое наибольшее количество детей могло присутствовать на кружке? (*А. Грибалко*)

3. Перед Фомой и Ерёмой лежат на столе 50 золотых монет весами 1, 2, 3, …, 50 г. Сначала Ерёма выкладывает их в ряд. Затем Фома берёт первую слева монету и кладёт её в кошелёк себе или Ерёме. Каждую следующую монету берёт и кладёт в один из двух кошельков тот, кому досталась предыдущая монета. Как только в одном из кошельков окажется 25 монет, остальные кладутся в другой кошелёк. Какое максимальное число граммов золота может гарантировать себе Ерёма, как бы ни действовал Фома? **(***А. Шаповалов***)**

4. На каждой клетке шахматной доски стоит по гному – лжецу или рыцарю. Соседями считаются гномы в клетках с общей стороной. Каждый гном сказал фразу «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей». Каково наибольшее возможное число рыцарей? (*А. Шаповалов*)

5. Придумайте три фигуры, из которых можно сложить как круг, так и квадрат (фигуры могут перекрываться, но и круг, и квадрат должны быть без дыр) (*Т. Казицына*)

6. Дан угол AOC, равный 45°. $ABCD$ - квадрат, причем B ближе к O, чем D. Из точек A и C восставлены перпендикуляры к сторонам угла, пересекающие другие стороны угла в точках $A1$, $C1$. Докажите, что $A1$, $C1$ и D лежат на одной прямой. (*Д.Мухин*)

7. На доске написано несколько натуральных чисел. Каждую минуту Егор выбирает какое-нибудь число и записывают на листок бумаги произведение всех остальных чисел, после чего выбранное число уменьшает на 1. Когда все числа на доске станут нулями, Егор сложит все числа на листке. Докажите, что сумма чисел, которая у него получится, не зависит от порядка, в котором он будет выбирать числа. (*Е. Бакаев*)

8. Найдите все тройки простых чисел p, q, r, для которых найдутся целые m и n такие, что $p+q=r^m$ и $p–q=r^n$. (*20-й Уральский турнир*)

8 класс, 4-й тур

1. Перед Фомой и Ерёмой лежат на столе 150 золотых монет весами 1, 2, 3, …, 150 г. Сначала Ерёма выкладывает их в ряд. Затем Фома берёт первую слева монету и кладёт её в кошелёк себе или Ерёме. Каждую следующую монету берёт и кладёт в один из двух кошельков тот, кому досталась предыдущая монета. Как только в одном из кошельков окажется 75 монет, остальные кладутся в другой кошелёк. Какое наибольший вес может гарантировать себе Ерёма, как бы ни действовал Фома? (*А. Шаповалов*)

2. Какое минимальное число коней можно поставить на шахматную доску так, чтобы в каждой паре клеток с общей стороной хотя бы одна клетка была побита? (Клетка, на которой стоит конь, *не считается* побитой). (*А. Солынин, А.Грибалко*)

3. От однокругового футбольного турнира, где результативно участвовало (то есть забило или пропустило по крайней мере один мяч) более трёх команд, осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Математик смог по ней однозначно восстановить счёт каждого матча. Докажите, что какая-то команда забила столько мячей, сколько пропустили все остальные вместе. (*А. Шаповалов*)

4. Одна из сторон треугольника равна a. Разрежьте его на три части, и сложите из них треугольник, у которого одна из сторон равна $2a$. (*Е. Бакаев*)

5. Существует ли такое a, при котором уравнение $x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx = a$ имеет ровно 2016 целочисленных решений? (*фольклор*)

6. Существует ли бесконечная последовательность a_0, a_1, a_2, ... целых неотрицательных чисел, в которой каждое целое неотрицательное число встречается ровно один раз, такая, что последовательность $b_n = a_n+n$ состоит из всех квадратов натуральных чисел, взятых по одному разу? (*Уральский турнир, 2010 г.*)

7. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC, угол CBD равен 30°, угол CDB равен 50°, угол ADB равен 65°. Найдите угол ABD. (*М. Волчкевич*)

8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. BL и CN – биссектрисы треугольников ABD и ACD соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников ABL и CDN, пересекаются в точках P и Q. Доказать, что прямая PQ проходит через середину дуги AD, не содержащей точку B. (*Д. Прокопенко*)

Примечание. В лиге 9 классов 4-го тура не было.

Источник: www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html