Турнир им. А.П. Савина, 2015 г. Третий тур.

6 класс. Первая лига.

1. На 10 шариках написаны различные цифры. Можно ли сложить из них треугольник так, чтобы нижнее (четырехзначное) число делилось на все три верхних, какую бы из трех сторон треугольника не считать нижней? (*А. Банникова*)

2. На отрезке AB длиной 24 см отметили три точки C, D и E так, что каждая из отмеченных точек является серединой какого-либо из получившихся отрезков. Чему может быть равна длина AC? (*Д. Шноль*)

3. Каждый из трех школьников прочитал ровно половину из данного им списка книг. При этом первый утверждает: «Четверть книг из списка никем из нас не прочитана», второй: «Самую толстую книгу прочитал только я», третий: «Никакую книгу, даже самую тонкую, не прочитали все трое». Может ли такое быть или кто-то из школьников ошибается? (*9-й КГТМБ*)

4. «Хоп!» – это игра на внимательность. Игроки по очереди называют натуральные числа в порядке возрастания. Если число кратно 3 или содержит в записи цифру 3, то вместо него надо сказать «Хоп!» Если не ошибаться, получится ряд: 1, 2, Хоп! 4, 5, Хоп! 7, 8, Хоп! , 10, 11, Хоп! Хоп! 14 и т.д. Кто по ошибке назовет запрещенное число, выходит из круга, а игра продолжается со следующего числа. Побеждает последний оставшийся игрок. Пять ребят играли в “Хоп!». Известно, что числа 1 и 23 назвал Петя, 2 и 20 – Вася, а 5 и 15 – Таня. Сколько раз победитель сказал «Хоп!»? (*И. Раскина*)

5. По доске 8×8 ползают чёрная и белая улитки. Улитка ползает из клетки в соседнюю по стороне клетку, оставляя за собой след соответствующего цвета. Верхний цвет перекрывает предыдущий, бывать на клетке более одного раза улитки могут, но находится вдвоём на одной клетке одновременно – нет. Может ли на доске получиться раскраска в полоску? (*А.Банникова*)

6. Решите ребус: КВАНТ + ВАНТ + АНТ + НТ + Т = ТУРНИР
(*Э. Акопян*)

7. Клетчатый прямоугольник из 72 клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей? (*А. Шаповалов*)

8. Имеется набор из 100 гирь массами 1г, 2г, …, 100г. Оля и Вера по очереди кладут на чаши весов гири. Первая кладет Вера. Цель Оли – сделать так, чтобы весы уравновесились, цель Веры – ей помешать. Всегда ли Вера сможет достичь своей цели?

6 класс. Высшая лига

1. Гарри подарил Гермионе 15 различных по весу конфет: средняя по весу со вкусом йода, а остальные со вкусом меда. Сможет ли Гермиона за 8 взвешиваний найти хотя бы одну конфету со вкусом меда? (*10-й турнир памяти Воронецкого*)

2. Двое строителей возводят стену шириной 100, по очереди укладывая (вертикально или горизонтально) кирпичи размерами 1×2. Кирпич можно класть либо в основание, либо так, чтобы во всех клетках под ним уже лежали кирпичи. Когда после хода одного из строителей высота стены хотя бы в каком-то месте превосходит 100, стена рушится и этот строитель проигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу и как ему для этого следует играть? (*Е. Бакаев*)

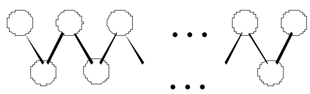
3. Каждый из трех школьников прочитал ровно половину из данного им списка книг. При этом первый утверждает: «Четверть книг из списка никем из нас не прочитана», второй: «Самую толстую книгу прочитал только я», третий: «Никакую книгу, даже самую тонкую, не прочитали все трое». Может ли такое быть или кто-то из школьников ошибается? **(***9-й КГТМБ***)**

4. «Хоп!» – это игра на внимательность. Игроки по очереди называют натуральные числа в порядке возрастания. Если число кратно 3 или содержит в записи цифру 3, то вместо него надо сказать «Хоп!» Если не ошибаться, получится ряд: 1, 2, Хоп! 4, 5, Хоп! 7, 8, Хоп! , 10, 11, Хоп! Хоп! 14 и т.д. Кто по ошибке назовет запрещенное число, выходит из круга, а игра продолжается со следующего числа. Побеждает последний оставшийся игрок. Пять ребят играли в “Хоп!». Известно, что числа 1 и 23 назвал Петя, 2 и 20 – Вася, а 5 и 15 – Таня. Сколько раз победитель сказал «Хоп!»? (*И. Раскина*)

5. На отрезке AB длиной 24 см отметили три точки C, D и E так, что каждая из отмеченных точек является серединой какого-либо из получившихся отрезков. Чему может быть равна длина AC? (*Д.Шноль*)

6. Сто детей встали в круг. На некоторых из них уселись комары. Каждую минуту с одного из детей слетают четыре комара и садятся по одному на двух его соседей справа и двух слева. Может ли через некоторое время на Кирилле оказаться на два комара меньше, на его соседе Юре на два комара больше, а на остальных детях остаться столько же комаров, сколько было в самом начале? (*38-й УТЮМ*)

7. Клетчатый прямоугольник из 1000 клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей? (*А.Шаповалов*)



8. Можно ли расставить числа от 1 до 101 в кружки так, чтобы любое число в нижнем ряду было равно разности чисел, стоящих в верхнем ряду и соединенных с ним? Всего на картинке 101 кружок. (24-*й УТЮМ*)

Лига 7-8 классов

1. Прямоугольную клетчатую таблицу 20×20 покрыли полностью без наложений двухклеточными доминошками. Каждую доминошку необходимо повернуть вокруг центра одной из клеток, которую она покрывает, на 90° (в любом направлении) или на 180°. Всегда ли можно сделать это так, чтобы доска снова оказалась покрыта полностью? **(***А. Шаповалов***)**

2. На отрезке AB длиной 24 см отметили три точки C, D и E так, что каждая из отмеченных точек является серединой какого-либо из получившихся отрезков. Чему может быть равна длина AC? (*Д. Шноль*)

3. Найдите все тройки чисел (x, y, z), для которых $\frac{4}{x}=\frac{5}{y}+\frac{6}{z}$ и при этом x – однозначное, y – двузначное, а z – трехзначное натуральное число. (*А.Шаповалов*)

4. «Хоп!» – это игра на внимательность. Игроки по очереди называют натуральные числа в порядке возрастания. Если число кратно 3 или содержит в записи цифру 3, то вместо него надо сказать «Хоп!» Если не ошибаться, получится ряд: 1, 2, Хоп! 4, 5, Хоп! 7, 8, Хоп! , 10, 11, Хоп! Хоп! 14 и т.д. Кто по ошибке назовет запрещенное число, выходит из круга, а игра продолжается со следующего числа. Побеждает последний оставшийся игрок. Пять ребят играли в “Хоп!». Известно, что числа 1 и 23 назвал Петя, 2 и 20 – Вася, а 5 и 15 – Таня. Сколько раз победитель сказал «Хоп!»? (*И. Раскина*)

5. BD – биссектриса треугольника ABC. На стороне BC отмечена точка E, а на продолжении стороны AC за точку A отмечена точка F. Оказалось, что $BD=DC$, $BE=DE$ и $EF\perp BD$. Докажите, что BA – биссектриса угла DBF. (*30-й Уральский турнир*)

6. Клетчатый прямоугольник из тысячи клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей? (*А. Шаповалов*)

7. По доске 8×8 ползают синяя и жёлтая улитки. Каждый час улитка переползает из клетки в соседнюю по стороне клетку, оставляя за собой след соответствующего цвета. Верхний цвет перекрывает предыдущий, бывать на клетке более одного раза улитки могут, но находится вдвоём на одной клетке одновременно – нет. В какой-то момент вся доска окажется покрашенной (при этом её не возбраняется красить дальше). Какие раскраски могут при этом получиться? (*А.Банникова*)

8. Гарри подарил Гермионе 15 различных по весу конфет: средняя по весу со вкусом йода, а остальные – со вкусом мёда. Сможет ли Гермиона за 8 взвешиваний найти хотя бы одну конфету со вкусом мёда? (*10-й турнир памяти Воронецкого*)

Лига 7 классов

1. Прямоугольную клетчатую таблицу 20×20 покрыли полностью без наложений двухклеточными доминошками. Каждую доминошку необходимо повернуть вокруг центра одной из клеток, которую она покрывает, на 90° (в любом направлении) или на 180°. Всегда ли можно сделать это так, чтобы доска снова оказалась покрыта полностью? **(***А. Шаповалов***)**

2. На отрезке AB длиной 24 см отметили три точки C, D и E так, что каждая из отмеченных точек является серединой какого-либо из получившихся отрезков. Чему может быть равна длина AC? (*Д. Шноль*)

3. Найдите все тройки чисел (x, y, z), для которых $\frac{4}{x}=\frac{5}{y}+\frac{6}{z}$ и при этом x – однозначное, y – двузначное, а z – трехзначное натуральное число. (*А.Шаповалов*)

4. Вдоль дороги стоят телеграфные столбы, на которых написаны номера 1, 2, 3 и т.д. Лёша задумал число 0 и пошёл по дороге. Проходя мимо столба, Лёша делит его номер на максимальную степень тройки, на которую этот номер делится. Если полученное частное дает остаток 1 при делении на 3, Лёша прибавляет к задуманному числу 1, а в противном случае вычитает из него 1. Какое число будет в голове у Лёши, когда он дойдёт до 2015-го столба? (*А. Заславский*)

5. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а угол A равен 30 градусов. На катете AC отметили точки P и Q так, что углы ABP и QBC равны по 10 градусов. Докажите, что $AQ = BP$. (*А.Хачатурян*)

6. Клетчатый прямоугольник из тысячи клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей? (*А. Шаповалов*)

7. По доске 8×8 ползают синяя и жёлтая улитки. Каждый час улитка переползает из клетки в соседнюю по стороне клетку, оставляя за собой след соответствующего цвета. Верхний цвет перекрывает предыдущий, бывать на клетке более одного раза улитки могут, но находится вдвоём на одной клетке одновременно – нет. В какой-то момент вся доска окажется покрашенной. Какие раскраски могут при этом получиться? (*А.Банникова*)

8. Натуральные числа от 1 до n покрасили в два цвета. Числа 1 и m синие, k и n – красные, $k < m$. Докажите что найдутся синяя и красная пары с одинаковыми разностями не меньшими, чем минимальная из разностей $m – 1$ и $n – k$. (*А. Шаповалов*)

8 класс

1. По кругу выписаны плюсы и минусы, всего 33 знака. Каждым ходом между каждыми двумя соседними знаками ставится плюс, если они одинаковые, и минус, если разные, после этого старые знаки стираются. Докажите, что положение после первого хода будет таким же, как после 32 ходов. (Положения считаются одинаковыми, если одно можно повернуть так, что получится другое.) (*Е. Бакаев*)

2. Натуральные числа от 1 до n покрасили в два цвета. Числа 1 и m синие, k и n – красные, $k < m$. Докажите что найдутся синяя и красная пары с одинаковыми разностями не меньшими, чем минимальная из разностей $m - 1$ и $n - k$. (*А. Шаповалов*)

3. Квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$ имеет корни x_1, x_2, причём $2 < x_1 \le x_2 < 3$. Докажите, что $5b + 2c < -12$. (*фольклор*)

4. Клетчатую таблицу 20×20 покрыли полностью без наложений двухклеточными доминошками. Каждую доминошку необходимо повернуть вокруг центра одной из клеток, которую она покрывает, на 90° (в любом направлении) или на 180°. Всегда ли можно сделать это так, чтобы доска снова оказалась покрыта полностью? (*А. Шаповалов*)

5. На сторонах AD, CD ромба $ABCD$ выбраны точки P, Q соответственно. Вписанная окружность треугольника ABP касается сторон PA, PB в точках P_1P_2; Вписанная окружность треугольника CBP касается сторон QC, QB в точках Q_1, Q_2. Докажите, что прямые P_1P_2, Q_1Q_2, BD пересекаются в одной точке. (*Д. Швецов*)

6. Последовательность a_n строится следующим образом: $a_0=0$, $a_n=a_{n-1}+1$, если частное от деления n на максимальную степень тройки сравнимо с 1 по модулю 3, и $a_n=a_{n-1}-1$ в противном случае. Найдите a_{2015}. (*А.Заславский*)

7. По доске 8×8 ползают чёрная и белая улитки. Каждую секунду одна из улиток переползает в соседнюю по стороне клетку и красит её в свой цвет. Верхний цвет перекрывает предыдущий, бывать на клетке более одного раза улитки могут, но находится вдвоём на одной клетке одновременно – нет. Изначально ни одна клетка не покрашена, а в конце они покрашены все. Сколько различных раскрасок доски в два цвета могло получиться таким образом? (*А.Банникова*)

8. На высоте, проведённой из вершины B треугольника ABC, лежит точка B_0. Перпендикуляр из B_0 на прямую AB пересекает AB в точке A_1, а прямую AC – в точке A_2; перпендикуляр из B_0 на прямую CB пересекает CB в точке C_1, а прямую AC – в точке C_2. Докажите, что точки A_1, A_2, C_1, C_2 лежат на окружности. (*Д.Швецов*)

9 класс

1. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AB отмечена точка K так, что угол KCB равен углу ACD. Через точку K провели прямую, параллельную BC, до пересечения с CD в точке L. Докажите, что равны углы BLC и ADB. (*А. Блинков*)

2. В середине XX века Всемирные шахматные олимпиады проводились по следующей схеме: все команды стран распределялись поровну на несколько подгрупп с четным количеством команд и в каждой подгруппе проходил однокруговой турнир. Затем, команды, занявшие первые два места в каждой подгруппе образовывали первую финальную группу, последующие две – вторую и т. д. В каждой финальной группе также проходил однокруговой турнир, причем результат встречи в подгруппе засчитывался. Организаторы стремились распределить команды по подгруппам так, чтобы количество матчей, проведенных каждой командой было наименьшим из возможных. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в олимпиаде, если известно, что каждая команда провела $4n + 1$ матчей? (*А. Блинков*)

3. На высоте, проведённой из вершины B треугольника ABC, лежит точка B_0. Перпендикуляр из B_0 на прямую AB пересекает AB в точке A_1, а прямую AC – в точке A_2; перпендикуляр из B_0 на прямую CB пересекает CB в точке C_1, а прямую AC – в точке C_2. Докажите, что точки A_1, A_2, C_1, C_2 лежат на окружности. (*Д.Швецов*)

4. Квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$ имеет корни x_1, x_2, причём $2 < x_1 \le x_2 < 3$. Докажите, что $5b + 2c < -12$. (*фольклор*)

5. По кругу выписаны плюсы и минусы, всего 33 знака. Каждым ходом между каждыми двумя соседними знаками ставится плюс, если они одинаковые, и минус, если разные, после этого старые знаки стираются. Докажите, что положение после 1 хода будет таким же, как после 32 ходов. (Положения считаются одинаковыми, если одно можно повернуть так, что получится другое.) (*Е. Бакаев*)

6. Клетчатую таблицу 20×20 покрыли полностью без наложений двухклеточными доминошками. Каждую доминошку необходимо повернуть вокруг центра одной из клеток, которую она покрывает, на 90° (в любом направлении) или на 180°. Всегда ли можно сделать это так, чтобы доска снова оказалась покрыта полностью? (*А.Шаповалов*)

7. Клетчатый прямоугольник из 1000 клеток разбит по линиям сетки на равновеликие прямоугольники. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей? (*А. Шаповалов*)

8. Известно, что $1 \le a_1 \le \ldots \le a_{99} \le a_{100} \le 2^{50}$. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_{99}}{a_{100}}$. (*фольклор*)

Источник: www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html