Турнир им. А.П. Савина, 2015 г. Второй тур.

6 класс. Первая лига.

1. У Васи есть комплект карточек с цифрами от 0 до 9. Используя их (возможно, не все), он составил N чисел, их сумма равна 2015. Найдите все возможные значения N. (*Э.Акопян, Д.Калинин*)

2. Можно ли составить прямоугольник из девяноста квадратов со стороной 90 и сорока пяти квадратов со стороной 45? (*К.Кноп, 30-й Уральский турнир*)

3. У Кощея хранятся 100 одинаковых бутылок с водой. Он помнит, что в половине бутылок живая вода, а во второй половине – мертвая, но не помнит, какая где. Если полить цветок хотя бы каплей Кощеевой воды, то завтра станет ясно, что это была за вода. Кощею завтра потребуются 10 бутылок живой воды. Какое наименьшее количество цветов он должен полить для того, чтобы ничего не перепутать? Поливать один цветок водой из нескольких бутылок нельзя. **(***Е.Горская***)**

4. Картина вместе с корзиной на 5 кг тяжелее картонки. Корзина с картонкой на 2 кг тяжелее картины. Что тяжелее и на сколько: картина или картонка? (*И.Раскина*)

5. Играют двое. Сначала на доске написаны числа от 1 до 13 по одному разу. За ход можно стереть любые два числа и вместо них написать их произведение. Проигрывает тот, после чьего хода одно из чисел на доске будет делиться на 100. Кто из игроков может обеспечить себе победу и как ему для этого следует играть? (*Е. Бакаев*)

6. Палиндромом называется число, которое справа налево и слева направо читается одинаково. Можно ли представить число 2015...2015 (2015 раз) как разность двух палиндромов? (*А.Шаповалов*)

7. На доске записаны в строку несколько букв a и b без пробелов и запятых. Саша подсчитал, что 16 раз буква b идет после буквы a, 8 раз буква a идет после букв ab и 7 раз после букв ab идет буква b. Какими могут быть две последние буквы на доске? (*Л. Смирнова*)

8. К переправе через бурную реку подошли 6 человек: А, Б, В, Г, Д и Е. Есть трехместная лодка, грести должны двое. Каждый согласен переправляться, если в лодке у него будет хотя бы один знакомый. Как им всем переправиться на другой берег, если знакомы А и Б, Б и В, В и Г, Г и Д, Г и Е; при этом Г не может грести? (*А.Шаповалов*)

6 класс. Высшая лига

1. У Васи есть комплект карточек с цифрами от 0 до 9. Используя их (возможно, не все), он составил N чисел, их сумма равна 2015. Найдите все возможные значения N. (*Э.Акопян, Д.Калинин*)

2. Можно ли составить прямоугольник из девяноста квадратов со стороной 90 и сорока пяти квадратов со стороной 45? (*К.Кноп, 30-й Уральский турнир*)

3. У Кощея хранятся 100 одинаковых бутылок с водой. Он помнит, что в половине бутылок живая вода, а во второй половине – мертвая, но не помнит, какая где. Если полить цветок хотя бы каплей Кощеевой воды, то завтра станет ясно, что это была за вода. Кощею завтра потребуются 10 бутылок живой воды. Какое наименьшее количество цветов он должен полить для того, чтобы ничего не перепутать? Поливать один цветок водой из нескольких бутылок нельзя. **(***Е.Горская***)**

4. В стране гномов 9 городов, некоторые из них гномы соединили дорогами. Всё было хорошо, но на города стал нападать дракон. Дракон разрушает все дороги, идущие из выбранного города, но затем трудолюбивые гномы строят дороги из этого города во все города, с которыми он не был соединён ранее. Дракон хочет, чтобы в итоге осталось не более k дорог. При каком наименьшем k он сможет этого добиться независимо от первоначальной системы дорог? (*А. Солынин*)

5. Играют двое. Сначала на доске написаны числа от 1 до 17 по одному разу. За ход можно стереть любые два числа и вместо них написать их произведение. Проигрывает тот, после чьего хода одно из чисел на доске будет делиться на 100. Кто из игроков может обеспечить себе победу и как ему для этого следует играть? (*Е. Бакаев*)

6. В ряд выложено 45 белых и 67 черных шаров. На каждом из них написано, сколько шаров противоположного цвета находится левее него. Сумма чисел на белых шарах равна 1000. Чему равна сумма чисел на черных? Укажите все варианты. (*А. Грибалко*)

7. На доске записаны в строку несколько букв *a* и *b* без пробелов и запятых. Саша подсчитал, что 16 раз буква *b* идет после буквы *a*, 15 раз буква *a* идет после буквы *b*, и 8 раз буква *a* идет после букв *ab*. Сколько раз после букв *bb* идет буква *a*? (*Л. Смирнова*)

8. Дан клетчатый квадрат 5×5. Одной операцией можно выбрать любой квадрат 3×3 или любую строку или любой столбец и поменять цвета всех клеток этой области на противоположные. С помощью таких операций из полностью белого квадрата получили квадрат, в котором ровно одна черная клетка. Где может оказаться эта клетка? Укажите все варианты. (*Е. Бакаев*)

Лига 7-8 классов

1. В ряд выложено 45 белых и 67 чёрных шаров. На каждом из них написали, сколько шаров противоположного цвета находится левее него. Оказалась, что сумма чисел, написанных на белых шарах, равна 1000. Чему равна сумма чисел, написанных на чёрных шарах? **(***А. Грибалко***)**

2. Играют двое. Сначала на доске написаны числа от 1 до 17 по одному разу. За ход можно стереть любые два числа и вместо них написать их произведение. Проигрывает тот, после чьего хода одно из чисел на доске будет делиться на 100. Кто из игроков может обеспечить себе победу и как ему для этого следует играть? (*Е. Бакаев*)

3. Пересечение двух четырёхугольников состоит из трёх не соприкасающихся друг с другом частей. Могут ли эти части быть равными треугольниками? (*А.Шаповалов*)

4. Дана доска 8×8. Одной операцией можно взять любой квадрат 3×3 или любую строку или любой столбец и поменять цвета всех клеток этой области на противоположные. С помощью таких операций из полностью белой доски получили доску, в которой ровно одна черная клетка. Где может оказаться эта клетка? (*Е. Бакаев*)

5. Палиндромом называется число, которое справа налево и слева направо читается одинаково. Можно ли представить число 2015...2015 (2015 раз) как разность двух палиндромов? (*А.Шаповалов*)

6. Дан треугольник ABC. На луче AB отметили точку K такую, что $AK + KC = 2AB$. На луче CB отметили точку L такую, что $AL + LC = 2CB$. Докажите, что биссектрисы углов AKC и ALC параллельны. (*Е. Бакаев*)

7. У Васи есть комплект карточек с цифрами от 0 до 9. Используя их (возможно, не все), он составил N чисел, их сумма равна 2015. Найдите все возможные значения N. (*Э.Акопян, Д.Калинин*)

8. В стране гномов 9 городов, некоторые из них гномы соединили дорогами. Всё было хорошо, но на города стал нападать дракон. Дракон разрушает все дороги, идущие из города, но зато трудолюбивые гномы строят дороги из этого города во все города, с которыми он не был соединён перед нападением дракона. Докажите, что дракон сможет добиться того, что в стране останется не более 16 дорог. (*А. Солынин*)

Лига 7 классов

1. В ряд выложено 45 белых и 67 чёрных шаров. На каждом из них написали, сколько шаров противоположного цвета находится левее него. Оказалась, что сумма чисел, написанных на белых шарах, равна 1000. Чему равна сумма чисел, написанных на чёрных шарах? **(***А. Грибалко***)**

2. Играют двое. Сначала на доске написаны числа от 1 до 17 по одному разу. За ход можно стереть любые два числа и вместо них написать их произведение. Проигрывает тот, после чьего хода одно из чисел на доске будет делиться на 100. Кто из игроков может обеспечить себе победу и как ему для этого следует играть? (*Е. Бакаев*)

3. Пересечение двух четырёхугольников состоит из трёх не соприкасающихся друг с другом частей. Могут ли эти части быть равными треугольниками? (*А.Шаповалов*)

4. Дана доска 8×8. Одной операцией можно взять любой квадрат 3×3 или любую строку или любой столбец и поменять цвета всех клеток этой области на противоположные. С помощью таких операций из полностью белой доски получили доску, в которой ровно одна черная клетка. Где может оказаться эта клетка? (*Е. Бакаев*)

5. Палиндромом называется число, которое справа налево и слева направо читается одинаково. Любое ли натуральное число можно представить в виде разности двух палиндромов? (*А.Шаповалов*)

6. Дан треугольник ABC. На луче AB отметили точку K такую, что $AK + KC = 2AB$. На луче CB отметили точку L такую, что $AL + LC = 2CB$. Докажите, что биссектрисы углов AKC и ALC параллельны. (*Е. Бакаев*)

7. У Васи есть комплект карточек с цифрами от 0 до 9. Используя их (возможно, не все), он составил N чисел, их сумма равна 2015. Найдите все возможные значения N. (*Э.Акопян, Д.Калинин*)

8. В стране гномов 9 городов, некоторые из них гномы соединили дорогами. Всё было хорошо, но на города стал нападать дракон. Дракон разрушает все дороги, идущие из города, но зато трудолюбивые гномы строят дороги из этого города во все города, с которыми он не был соединён перед нападением дракона. Докажите, что дракон сможет добиться того, что в стране останется не более 16 дорог. (*А. Солынин*)

8 класс

1. Дана доска 8×8. Одной операцией можно взять любой квадрат 3×3 или любую строку или любой столбец и поменять цвета всех клеток этой области на противоположные. С помощью таких операций из полностью белой доски получили доску, в которой ровно одна черная клетка. Где может оказаться эта клетка? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (*Е. Бакаев*)

2. Точка C лежит внутри полукруга с диаметром AB, I - центр вписанной окружности треугольника ABC. Лучи AI и BI пересекают данную полуокружность в точках X и Y. Докажите, что $XY \perp CI$. (*М. Волчкевич*)

3. В ряд выложено 45 белых и 67 чёрных шаров. На каждом из них написали, сколько шаров противоположного цвета находится левее него. Оказалась, что сумма чисел, написанных на белых шарах, равна 1000. Чему равна сумма чисел, написанных на чёрных шарах? (*А. Грибалко*)

4. Петя задумал три различных числа $x < y < z$ и написал на доске их попарные суммы. Оказалось, что эти суммы равны попарным произведениям тех же чисел x, y, z (возможно, взятых в другом порядке). Определите знаки чисел x, y, z. (Доказывать их существование не требуется; такие числа действительно существуют.) (*Б. Френкин*)

5. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1, B_1. K и L - середины отрезков AB_1 и AC_1, M и N - середины отрезков BA_1 и BC_1. Доказать, что точка пересечения KL и MN равноудалена от точек A и B. (*А. Гаркавый*)

6. Докажите, что для любого натурального $n \geq 30$ на отрезке $[2n, 3n]$ существуют натуральные числа x, y, z такие, что $x^2 + y^2 - z^2 = n^2$. (*А. Грибалко*)

7. Решите в целых числах уравнение $x^3+x=x^2+y^2$. (18-*й* У*ральский турнир*)

8. В стране гномов N городов, некоторые из них гномы соединили дорогами. Всё было хорошо, но на города стал нападать дракон. Дракон разрушает все дороги, идущие из города, но зато трудолюбивые гномы строят дороги из этого города во все города, с которыми он не был соединён перед нападением дракона. Дракон хочет, чтобы в стране осталось не более k дорог. При каком наименьшем k он сможет этого добиться независимо от первоначальной системы дорог? (*А. Солынин*)

9 класс

1. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1, B_1. Точки K и L – середины отрезков AB_1 и AC_1, M и N – середины отрезков BA_1 и BC_1. Доказать, что точка пересечения прямых KL и MN равноудалена от точек A и B. (*А. Гаркавый*)

2. Точка C лежит внутри полукруга с диаметром AB, I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Лучи AI и BI пересекают данную полуокружность в точках X и Y. Докажите, что $XY \perp CI$. (*М. Волчкевич*)

3. В стране 9 городов. Некоторые из них соединены дорогами. Правительство может взять какой-нибудь город под наблюдение. При этом разрушаются все дороги, соединяющие данный город с остальными, зато строятся все дороги между наблюдаемым городом и теми городами, с которыми он не был соединён. Докажите, что такими наблюдениями правительство сможет добиться того, что в стране останется не более 16 дорог. (*А. Солынин*)

4. Дана доска 8×8. Одной операцией можно взять любой квадрат 3×3 или любую строку или любой столбец и поменять цвета всех клеток этой области на противоположные. С помощью таких операций из полностью белой доски получили доску, в которой ровно одна черная клетка. Где может оказаться эта клетка? (*Е. Бакаев*)

5. Петя задумал три различных числа $x < y < z$ и написал на доске их попарные суммы. Оказалось, что эти суммы равны попарным произведениям тех же чисел x, y, z (возможно, взятых в другом порядке). Определите знаки чисел x, y, z. (Доказывать их существование не требуется; такие числа действительно существуют.) (*Б. Френкин*)

6. В ряд выложено 45 белых и 67 черных шаров. На каждом из них написали, сколько шаров противоположного цвета находится левее него. Оказалось, что сумма чисел на белых шарах равна 1000. Чему может быть равна сумма чисел на черных? (*А. Грибалко*)

7. Найти все простые p, такие, что $5^p + 4p^4$ является квадратом натурального числа. (*фольклор*)

8. В вершинах квадрата со стороной 1 м были вбиты колышки. Один из колышков переставили, но не более чем на 20 см от первоначального положения. У Пети есть веревка, с помощью которой он может сравнить расстояние между двумя колышками с расстоянием между еще какой-то парой колышков. (Т.е. можно сравнивать любые два расстояния из шести попарных расстояний между колышками.) Каких-либо других действий (например, завязывать узелки, складывать пополам и проч.) с веревкой делать нельзя. Всегда ли Петя сможет определить, какой из колышков был переставлен? (*А.Марачев*)

Источник: www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html