

Турнир им. А.П. Савина, 2015 г. Первый тур.

6 класс. Первая лига.

1. В колоде 52 карты (4 масти, 13 достоинств). Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Достаточно ли этой информации, чтобы узнать пару крайних карт колоды? (А. Шаповалов)

2. Калькулятор умеет прибавлять к числу его последнюю цифру, а больше ничего не умеет. Сколько существует двузначных чисел, из которых за несколько таких операций можно получить число 2016? (Л. Смирнова)

3. Каждый из трех рубильников включает три лампочки, а всего их семь. Лампочка загорается, если включен хотя бы один включающий ее рубильник. Если включить первый и второй, то загорятся лампочки с номерами 1, 2, 4 и 5. Если включить второй и третий, то загорятся все, кроме 2. А сколько лампочек загорится, если включить первый и третий? (Е. Бакаев, Д. Шноль)

4. На доске стоят несколько ладей. Каждая собирается сделать ход на некоторую пустую клетку, при этом ей не надо перепрыгивать через другие ладьи. Все ладьи собираются пойти на разные клетки. Может ли случиться, что в каком бы порядке ладьи ни ходили, все намеченные ходы сделать не удастся? (А. Шаповалов)

5. Гномы и эльфы решили мирным путем выяснить, кто круче. Вокруг круглого стола расставили $n > 13$ стульев. Гномы и эльфы по очереди садятся на них. За один ход можно занять либо один стул, либо сразу два, между которыми стоит ровно шесть других стульев. Кто займет последний стул, тот и круче. Начинают гномы. Кто окажется круче при правильной игре? (Э. Акопян)

6. Принцесса отправилась на прогулку к роднику. В дороге она захотела пить и отправила двух фрейлин за водой, а сама продолжила путь. Первая фрейлина побежала к роднику, а вторая – во дворец. Фрейлины вернулись одновременно, когда принцесса прошла ровно три четверти пути от дворца до родника. Во сколько раз фрейлины бегают быстрее, чем ходит принцесса, если известно, что бегают они с одинаковой скоростью? (УТЮМ-39)

7. Написали десятизначное число. Его разрезали на две части и нашли НОД двух получившихся чисел. Так сделали для всех девяти способов его разрезать. Могло ли так получиться, что НОД везде получался разным числом от 1 до 9? (Е. Бакаев)

8. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на 30 равных отрезков; через концы этих отрезков проведены прямые, параллельные сторонам, разбивающие треугольник на маленькие треугольники. Группу треугольников, лежащих между двумя соседними параллельными прямыми, будем называть полосой. (Всего получилось 90 полос, три из которых состоят из одного треугольника.) Егор хочет покрасить 45 маленьких треугольников в синий цвет так, чтобы в каждой полосе был хотя бы один синий треугольник. Удастся ли ему это сделать? (Е. Бакаев)

6 класс. Высшая лига.

1. В колоде 52 карты (4 масти, 13 достоинств). Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Достаточно ли этой информации, чтобы узнать пару крайних карт колоды? (*А. Шаповалов*)
2. Калькулятор умеет прибавлять к числу его последнюю цифру, а больше ничего не умеет. Сколько существует двузначных чисел, из которых за несколько таких операций можно получить число 2016? (*Л. Смирнова*)
3. У каждой из семи поварих есть брат. Каждая замужем за братом другой поварихи. За год каждая повариха похудела на 3 килограмма больше, чем поправился ее муж, и при этом на вдвое большее число килограммов, чем ее брат. На какое наибольшее число килограммов могла похудеть повариха Матрена? (*О. Нечаева, УТЮМ-28*)
4. На доске стоят несколько ладей. Каждая собирается сделать ход на некоторую пустую клетку, при этом ей не надо перепрыгивать через другие лады. Все лады собираются пойти на разные клетки. Может ли случиться, что в каком бы порядке лады ни ходили, все намеченные ходы сделать не удастся? (*А. Шаповалов*)
5. Гномы и эльфы решили мирным путем выяснить, кто круче. Вокруг круглого стола расставили $n > 13$ стульев. Гномы и эльфы по очереди садятся на них. За один ход можно занять либо один стул, либо сразу два, между которыми стоит ровно шесть других стульев. Кто займет последний стул, тот и круче. Начинают гномы. Кто окажется круче при правильной игре? (*Э. Акопян*)
6. Принцесса отправилась на прогулку к роднику. В дороге она захотела пить и отправила двух фрейлин за водой, а сама продолжила путь. Первая фрейлина побежала к роднику, а вторая – во дворец. Фрейлины вернулись одновременно, когда принцесса прошла ровно три четверти пути от дворца до родника. Во сколько раз фрейлины бегают быстрее, чем ходит принцесса, если известно, что бегают они с одинаковой скоростью? (*УТЮМ-39*)
7. Написали десятизначное число. Его разрезали на две части и нашли НОД двух получившихся чисел. Так сделали для всех девяти способов его разрезать. Могло ли так получиться, что НОД везде получался разным числом от 1 до 9? (*Е. Бакаев*)
8. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на 30 равных отрезков; через концы этих отрезков проведены прямые, параллельные сторонам, разбивающие треугольник на маленькие треугольники. Группу треугольников, лежащих между двумя соседними параллельными прямыми, будем называть полосой. (Всего получилось 90 полос, три из которых состоят из одного треугольника.) Егор хочет покрасить 45 маленьких треугольников в синий цвет так, чтобы в каждой полосе был хотя бы один синий треугольник. Удастся ли ему это сделать? (*Е. Бакаев*)

Лига 7-8

1. Калькулятор умеет прибавлять к числу его последнюю цифру, а больше ничего не умеет. Сколько существует двузначных чисел, из которых за несколько таких операций можно получить число 2016? (Л. Смирнова)

2. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на 2015 равных отрезков; через концы этих отрезков проведены прямые, параллельные сторонам, разбивающие треугольник на маленькие треугольники. Группу треугольников, лежащих между двумя соседними параллельными прямыми, будем называть полосой. (Всего получилось $3 \cdot 2015$ полос, три из которых состоят из одного треугольника.) Какое наименьшее количество маленьких треугольников надо покрасить в синий цвет так, чтобы в каждой полосе был хотя бы один синий треугольник? (Е. Бакаев)

3. На медиане BM треугольника ABC отметили точки K и L так, что $AK=BC$, а угол BLC – прямой. Найдите $BK:BM$. (Е. Бакаев)

4. Сумма положительных чисел больше 90, а каждое из слагаемых не больше 10. Докажите, что можно выбрать несколько чисел, сумма которых не больше 90 и при этом больше 81. (П. Семенов)

5. На доске стоят несколько ладей. Каждая собирается сделать ход на некоторую пустую клетку, при этом ей не надо перепрыгивать через другие ладьи. Все ладьи собираются пойти на разные клетки. Может ли случиться, что в каком бы порядке ладьи ни ходили, все намеченные ходы сделать не удастся? (А. Шаповалов)

6. В колоде 52 карты (4 масти, 13 достоинств). Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Достаточно ли этой информации, чтобы узнать пару крайних карт колоды? (А. Шаповалов)

7. На плоскости проведено 6 прямых и отмечено несколько точек. Оказалось, что на каждой прямой отмечено ровно по 3 точки. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено? (34-й УТЮМ)

8. Гномы и эльфы решили мирным путем выяснить, кто круче. Вокруг круглого стола расставили $n > 13$ стульев. Гномы и эльфы по очереди садятся на них. За один ход можно занять либо один стул, либо сразу два, между которыми стоит ровно шесть других стульев. Кто займет последний стул, тот и круче. Начинают гномы. Кто окажется круче при правильной игре? (Э. Акопян)

7 класс, Высшая лига

1. Калькулятор умеет прибавлять к числу его последнюю цифру, а больше ничего не умеет. Сколько существует двузначных чисел, из которых за несколько таких операций можно получить число 2016? (Л. Смирнова)

2. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на 2015 равных отрезков; через концы этих отрезков проведены прямые, параллельные сторонам, разбивающие треугольник на маленькие треугольники. Группу треугольников, лежащих между двумя соседними параллельными прямыми, будем называть полосой. (Всего получилось $3 \cdot 2015$ полос, три из которых состоят из одного треугольника.) Какое наименьшее количество маленьких треугольников надо покрасить в синий цвет так, чтобы в каждой полосе был хотя бы один синий треугольник? (Е. Бакаев)

3. На медиане BM треугольника ABC отметили точки K и L так, что $AK=BC$, а угол BLC – прямой. Найдите $BK:BM$. (Е. Бакаев)

4. Сумма положительных чисел больше 90, а каждое из слагаемых не больше 10. Докажите, что можно выбрать несколько чисел, сумма которых не больше 90 и при этом больше 81. (П. Семенов)

5. Шахматную доску разбили на доминошки. Рядом с каждой горизонталью и каждой вертикалью доски написали, сколько прямоугольников пересекает соответствующая линия. Докажите, что если рассматривать все числа, которые могут быть написаны (т.е. 4, 5, 6, 7, 8), то какое-то из них написано не более двух раз. (А. Грибалко)

6. В высшей лиге первенства России по футболу участвуют 16 команд, которые играют в два круга. По итогам турнира две команды, набравшие меньше всего очков, выбывают в первую лигу. За какое наибольшее количество туров до конца турнира может оказаться так, что эти две команды уже определились? (А. Блинков)

7. На плоскости проведено 6 прямых и отмечено несколько точек. Оказалось, что на каждой прямой отмечено ровно по 3 точки. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено? (34-й УТЮМ)

8. Гномы и эльфы решили мирным путем выяснить, кто круче. Вокруг круглого стола расставили $n > 13$ стульев. Гномы и эльфы по очереди садятся на них. За один ход можно занять либо один стул, либо сразу два, между которыми стоит ровно шесть других стульев. Кто займет последний стул, тот и круче. Начинают гномы. Кто окажется круче при правильной игре? (Э. Акопян)

Лига 8 классов

1. В высшей лиге первенства России по футболу участвуют 16 команд, которые играют в два круга. По итогам турнира две команды, набравшие меньше всего очков, выбывают в первую лигу. За какое наибольшее количество туров до конца турнира может оказаться так, что эти две команды уже определились? (*А. Блинков*)

2. В окружность с радиусом 1 вписан правильный 10-угольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$. Найти расстояние между прямыми A_2A_4 и A_1A_5 . (*А.Заславский*)

3. Две окружности пересекаются в точках A и B , а P и Q — точки касания этих окружностей с их общей касательной. Точка H — ортоцентр треугольника PAQ . Докажите, что угол ABH — прямой. (*Е. Бакаев*)

4. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на n равных отрезков; через концы этих отрезков проведены прямые, параллельные сторонам, разбивающие треугольник на маленькие треугольники. Группу треугольников, лежащих между двумя соседними параллельными прямыми, будем называть полосой. (Всего получилось $3n$ полос, три из которых состоят из одного треугольника.)

Какое наименьшее количество маленьких треугольников надо покрасить в синий цвет так, чтобы в каждой полосе был хотя бы один синий треугольник? (*Е. Бакаев*)

5. Каждый раз одну из куч камней делим на две и записываем число $ab(a + b)$, где a и b — количества камней в двух новых кучках. Сначала была одна куча из N камней, а в конце остались только кучи из одного камня. Чему может быть равна сумма записанных выражений? (*Е. Бакаев*)

6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\ b = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\ c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \\ d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \end{cases}$$

(*фольклор*)

7. Существует ли квадратный трехчлен, при подстановке в который дроби вида $(n-2015)/n$ (где n — натуральное число) получается дробь такого же вида? (*А. Шаповалов*)

8. Шахматную доску разбили на доминошки. Рядом с каждой горизонталью и каждой вертикалью доски написали, сколько прямоугольников пересекает соответствующая линия. Докажите, что если рассматривать все числа, которые могут быть написаны (т.е. 4, 5, 6, 7, 8), то какое-то из них написано не более двух раз. (*А. Грибалко*)

Лига 9 классов

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\ b = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\ c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \\ d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \end{cases}$$

(фольклор)

2. Существует ли квадратный трехчлен, при подстановке в который дроби вида $(n-2015)/n$ (где n – натуральное число) получается дробь такого же вида? (А. Шаповалов)

3. В куче N камней. Каждый раз одну из куч камней делили на две и записывали число $ab(a+b)$, где a и b – количества камней в двух новых кучках. В конце остались только кучи из одного камня. Чему может быть равна сумма записанных выражений? (Е. Бакаев)

4. В высшей лиге первенства России по футболу участвуют 16 команд, которые играют в два круга. По итогам турнира две команды, набравшие меньше всего очков, выбывают в первую лигу. За какое наибольшее количество туров до конца турнира может оказаться так, что эти две команды уже определились? (А. Блинков)

5. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на n равных отрезков; через концы этих отрезков проведены прямые, параллельные сторонам, разбивающие треугольник на маленькие треугольники. Группу треугольников, лежащих между двумя соседними параллельными прямыми, будем называть полосой. (Всего получилось $3n$ полос, три из которых состоят из одного треугольника.)

Какое наименьшее количество маленьких треугольников надо покрасить в синий цвет так, чтобы в каждой полосе был хотя бы один синий треугольник? (Е. Бакаев)

6. Шахматную доску разбили на доминошки. Рядом с каждой горизонталью и каждой вертикалью доски написали, сколько прямоугольников пересекает соответствующая линия. Докажите, что если рассматривать все числа, которые могут быть написаны (т.е. 4, 5, 6, 7, 8), то какое-то из них написано не более двух раз. (А. Грибалко)

7. Две окружности пересекаются в точках A и B , а P и Q — точки касания этих окружностей с их общей касательной. Точка H — ортоцентр треугольника PAQ . Докажите, что угол ABH — прямой. (Е. Бакаев)

8. Точки P и Q - середины сторон BC и CD правильного шестиугольника $ABCDEF$, отрезки AQ и FP пересекаются в точке T . Найдите отношение $AT : TQ$. (Е. Бакаев)

Источник: www.ashap.info/Turnir/Savin/index.html