

Турнир им. А.П. Савина, 2015 г.

Личная олимпиада

6 класс

1. Петя ходит на работу каждый третий день, а Вася – каждый пятый. В тот день, когда они оба не работают, Вася и Петя вдвоём идут на рыбалку. Известно, что 6, 7, 9 и 10 июня друзья были на рыбалке. Когда в июне они последний раз сходят на рыбалку? (Е. Бакаев, Т. Казицына)

2. Барон Мюнхгаузен поставил трех ферзей на шахматную доску и утверждает, что теперь по соседству с каждой непобитой ими клеткой есть не менее двух побитых. Могут ли его слова быть правдой? (Размер доски: 8×8 клеток, ферзь бьет все клетки по горизонтали, по вертикали и по диагоналям, клетки считаются соседними, если имеют общую сторону). (А. Сольнин)

3. На столе лежало 20 яблок. К столу подошла группа детей. Половина детей взяли по два яблока и ушли. Затем половина оставшихся взяли по два яблока и ушли. Затем опять половина оставшихся взяли по два яблока и ушли. Наконец, все оставшиеся взяли по два яблока и ушли. Сколько яблок могло остаться на столе? (Б. Френкин)

4. Буратино удалось выучить только все цифры от 0 до 5, поэтому Мальвина задала ему два ребуса, в которых нет других цифр: $ШОУ \times А = ДОМА$ и $МУ \times УМ = ШОУ$. Помогите Буратино их расшифровать. (А. Блинков)

5. Можно ли разрезать квадрат на 6 различных фигур одинакового периметра и одинаковой площади? (А. Шаповалов, Д. Калинин)

6. К переправе через реку одновременно подошли три разбойника на левом берегу и четыре купца на правом. Каждому надо на противоположный берег. У левого берега есть двухместная лодка. Купцы не хотят оказаться в меньшинстве на одном берегу с разбойниками. Грести могут только один из купцов и один из разбойников. Каким образом им всем переправиться? (А. Шаповалов)

7. Летняя школа проходила 11 дней. Каждый день кормили комаров 10% ее участников. Для любых двух последовательных дней больше 1% участников школы кормили комаров оба эти дня. Обязательно ли найдется участник, ни разу не кормивший комаров? (А. Ляховец, О. Орел, А. Скопенков)

8. Можно ли отметить на листе бумаги 8 точек и провести 8 прямых (каждую – ровно через две отмеченные точки) так, чтобы по обе стороны от каждой прямой было одинаковое количество точек? (Фольклор)

9. Султан вызвал 10 умнейших своих мудрецов и огласил правила нового испытания. Каждому мудрецу сообщают натуральное число, не большее, чем 1000, причем одно из чисел строго больше остальных. Затем каждого мудреца по очереди будут спрашивать, не у него ли наибольшее число. Он может ответить либо «Не знаю», либо «У меня». После ответа «Не знаю» испытание продолжается, и вопрос задают следующему мудрецу. Если десятый мудрец ответил «Не знаю», то вопрос опять задают первому мудрецу, и так далее. После ответа «У меня» испытание заканчивается. Если мудрец дал верный ответ, то всех мудрецов отпускают, если неверный – всех мудрецов казнят. Мудрецам запретили не только обмениваться какой-либо информацией во время испытания, но даже договариваться о чем-либо заранее. Королевский палач сто раз обошел всех мудрецов, и сто раз каждый из них ответил «Не знаю». Наконец, палач в сто первый раз спросил первого мудреца, не у него ли наибольшее число. «У меня!» – ответил мудрец и этот ответ был верный. Какое число было у первого мудреца? (С. Грибок)

7 класс

1. Петя записал в вершинах квадрата четыре числа, сумма которых равна 100, затем записал на каждой стороне произведение чисел, стоящих в её концах, после чего вычислил сумму чисел, записанных на сторонах. Вася увеличил каждое число, поставленное Петей в вершине, на 1, затем точно таким же образом подсчитал новую сумму чисел на сторонах. На сколько Васина сумма больше Петиной? (А. Шаповалов)
2. Два равных прямоугольных треугольника ABC и ADE расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что точка E равноудалена от B и D . Найдите отмеченный угол. (А. Блинков)
3. На столе лежало 20 яблок. К столу подошла группа детей. Половина детей взяли по два яблока и ушли. Затем половина оставшихся взяли по два яблока и ушли. Затем опять половина оставшихся взяли по два яблока и ушли. Наконец, все оставшиеся взяли по два яблока и ушли. Сколько яблок могло остаться на столе? (Б. Френкин)
4. Летняя школа проходила 11 дней. Каждый день кормили комаров 10% ее участников. Для любых двух последовательных дней больше 1% участников школы кормили комаров оба эти дня. Обязательно ли найдется участник, ни разу не кормивший комаров? (А. Ляховец, О. Орел, А. Скопенков)
5. У Мюнхгаузена есть четырёхугольник, в котором самая длинная диагональ равна 10 см. Он разрезал его на 4 равнобедренных треугольника. Могло ли оказаться так, что у каждого треугольника самая длинная сторона также равна 10 см? (А. Шаповалов)
6. Может ли сумма цифр натурального числа A равняться числу B , а произведение цифр числа B равняться числу A ? (B десятичной записи каждого из чисел A и B – более одной цифры.) (Н. Чернятьев)
7. Вышел Иван – крестьянский сын на бой со Змеем Горынычем. Срубил ему половину голов и еще одну голову, а у Змея количество голов удвоилось. Срубил Иван Змею половину этих голов и еще две, а у того количество голов утроилось, опять срубил половину голов и еще три, а у Змея аж вчетверо голов больше стало. Бились они так еще какое-то время и все же одолел Иван супостата. Сколько же голов было у Змея Горыныча? (А. Заславский)
8. В треугольнике ABC угол A равен 30° , а угол C равен 105° . Найдите угол между медианой BM и стороной AB . (Е. Бакаев)
9. Султан вызвал 10 умнейших своих мудрецов и огласил правила нового испытания. Каждому мудрецу сообщат натуральное число, не большее, чем 1000, причем одно из чисел строго больше остальных. Затем каждого мудреца по очереди будут спрашивать, не у него ли наибольшее число. Он может ответить либо «Не знаю», либо «У меня». После ответа «Не знаю» испытание продолжается, и вопрос задают следующему мудрецу. Если десятый мудрец ответил «Не знаю», то вопрос опять задают первому мудрецу, и так далее. После ответа «У меня» испытание заканчивается. Если мудрец дал верный ответ, то всех мудрецов отпускают, если неверный – всех мудрецов казнят. Мудрецам запретили не только обмениваться какой-либо информацией во время испытания, но даже договариваться о чем-либо заранее. Королевский палач сто раз обошел всех мудрецов, и сто раз каждый из них ответил «Не знаю». Наконец, палач в сто первый раз спросил первого мудреца, не у него ли наибольшее число. «У меня!» – ответил мудрец и этот ответ был верный. Какое число было у первого мудреца? (С. Грибок)

8 класс

1. Каждый ученик класса вышел к доске и записал одно неравенство вида $x * a$, где x – переменная, a – какое-то число, $*$ – один из знаков неравенства. Верно ли, что, учитель может указать такое значение x , что не менее половины записанных неравенств окажутся верными? (А. Акопян)
2. В треугольнике ABC высота BH проходит через середину медианы AM , K – середина отрезка BM . Докажите, что треугольник AKC равнобедренный. (Ю. Блинков)
3. Расставьте 16 ферзей на клетчатой доске размером 9×9 так, чтобы каждый бил ровно трёх других. (А. Шаповалов)
4. Найдите все пятизначные числа вида \overline{abcde} , которые делятся на числа вида \overline{abde} . (Различными буквами могут быть обозначены одинаковые цифры.) (Н. Наконечный)
5. В пятиугольнике самая длинная диагональ равна 1. Его разрезали на 5 равных треугольников. Может ли оказаться так, что у каждого треугольника самая длинная сторона также равна 1? (А. Шаповалов)
6. Двое юношей и 9 девушек переправились через реку на трёхместной лодке. Грести умели все, поэтому им хватило 15-ти рейсов (считая рейсы туда и рейсы обратно). Мог ли при этом каждый юноша хотя бы раз совершить рейс с каждой девушкой (при этом в лодке могло быть и трое)? (А. Шаповалов)
7. В тридевятом государстве было 200 работающих предприятий. Шесть министров приватизировали часть предприятий. Когда наступили «смутные времена», первый министр продал второму 10% своих предприятий и еще одно. Затем второй министр продал третьему 10% предприятий, имеющихся у него к этому моменту, и еще два, после чего третий продал 10% и еще три, и так далее, до тех пор, пока шестой не продал первому 10% своих предприятий и еще 6. В результате у каждого министра оказалось столько же предприятий, сколько он приватизировал изначально. Сколько предприятий осталось у государства? (А. Заславский)
8. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30° . Вписанная в него окружность с центром I касается катетов AC и BC в точках B_0 и A_0 соответственно. Серединный перпендикуляр к гипотенузе AB пересекает прямую A_0B_0 в точке L . Докажите, что $AI \parallel CL$. (Д. Швецов, Ю. Зайцева)
9. Можно ли заполнить числами квадратную таблицу 7×7 так, чтобы сумма всех чисел в любом квадрате 3×3 была положительной, а сумма всех чисел в любом квадрате 5×5 – отрицательной? (В. Журавлёв, П. Самовол)

9 класс

1. Даны различные положительные числа a и b . На первом шаге вычисляется их среднее арифметическое, на втором – среднее арифметическое a и полученного числа, и так далее, на каждом шаге – среднее арифметическое a и числа, полученного на предыдущем шаге. Найдите отношение $\frac{b}{a}$, если число, полученное на n -ом шаге ($n > 1$), совпало со средним гармоническим a и b . (А. Блинков)
2. В трапеции $ABCD$ угол A равен 60° . Точка E на боковой стороне AB такова, что треугольник CDE равносторонний. Докажите, что $AB = AD$. (М. Васильев)
3. Расставьте 16 ферзей на клетчатой доске размером 9×9 так, чтобы каждый бил ровно трёх других. (А. Шаповалов)
4. В тридевятом государстве было 200 работающих предприятий. Шесть министров приватизировали часть предприятий. Когда наступили «смутные времена», первый министр продал второму 10% своих предприятий и еще одно. Затем второй министр продал третьему 10% предприятий, имеющихся у него к этому моменту, и еще два, после чего третий продал 10% и еще три, и так далее, до тех пор, пока шестой не продал первому 10% своих предприятий и еще 6. В результате у каждого министра оказалось столько же предприятий, сколько он приватизировал изначально. Сколько предприятий осталось у государства? (А. Заславский)
5. Барон Мюнхгаузен утверждает, что для любого указанного ему натурального числа N он сможет нарисовать многоугольник, который можно разрезать на N меньших равных выпуклых многоугольников того же диаметра. Могут ли слова барона быть правдой? (Диаметр многоугольника – расстояние между двумя наиболее удаленными его точками.) (А. Шаповалов)
6. Можно ли заполнить числами квадратную таблицу 7×7 так, чтобы сумма всех чисел в любом квадрате 3×3 была положительной, а сумма всех чисел в любом квадрате 5×5 – отрицательной? (В. Журавлёв, П. Самовол)
7. Известно, что $a < b < c$ – натуральные числа, составляющие арифметическую прогрессию. Может ли выполняться равенство $\text{НОК}(a; b) = \text{НОК}(a; c)$? (Б. Френкин)
8. Треугольники AMB и BNC – равносторонние, $AK = AB$, $CK = CB$ (см. рисунок). Докажите, что точки K , M и N лежат на одной прямой. (А. Акопян)
9. В футбольном турнире команда A заняла первое место, набрав больше всех очков, а команда B – последнее место, набрав меньше всех очков. Если бы за победу давали не 3 очка, а 2, то, наоборот, команда B стала бы первой, а команда A – последней. Какое наименьшее количество команд могло играть в турнире? (Каждая команда сыграла с каждой один раз.) (А. Заславский)

Источник: www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html