

Турнир им. А.П.Савина, 2015 год

Математический квадрат

Условия

6 класс

Логика

Л1. Следователь допрашивает трех свидетелей. Вова утверждает, что Влад лжёт, Влад обвиняет во лжи Лешу, а Лёша уговаривает не верить ни Вова, ни Владу. Кто из свидетелей говорит правду?

Л2. Три брата вернулись с рыбалки. Мама спросила у каждого, сколько они вместе поймали рыб. Вася сказал: “Больше десяти”, Петя: “Больше восемнадцати”, Коля: “Больше пятнадцати”. Сколько могло быть поймано рыб (укажите все возможности), если известно, что два брата сказали правду, а третий – неправду?

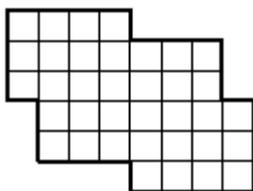
Л3. Саня дружит с Алексеем, Верой, Глебом, Дашей и Евгением. У него День Рождения. Если пригласить Алексея, то тогда надо пригласить и Веру. Обязательно нужно пригласить либо Глеба, либо Веру, но приглашать их вместе не стоит. Также нужно пригласить либо Дашу, либо Евгения, либо обоих вместе. Дашу можно приглашать либо вместе с Глебом, либо никого из них. А если пригласить Евгения, то тогда необходимо пригласить Алексея и Дашу. Кого же всё-таки надо пригласить?

Л4. За круглым столом стоят 2015 человек. Каждый из них — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Оказалось, что рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец. Каждого из сидящих за столом спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. Несколько человек ответили, что один, а все остальные — что два. Какое наименьшее количество лжецов может сидеть за столом?

Л5. За круглым столом сидят рыцари и лжецы. Каждый сидящий за столом заявил, что оба его соседа лжецы. При этом оказалось, что теперь количество рыцарей можно определить однозначно. Сколько человек могло сидеть за столом?

Разрезания

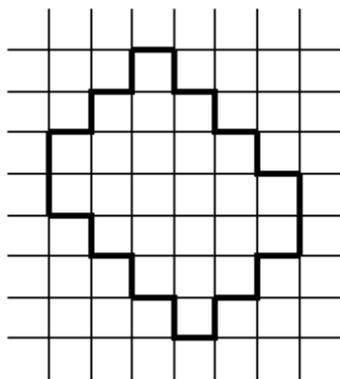
Рз1. Разрежьте фигуру на четыре равные части по линиям сетки.



Рз2. Разделите прямоугольник размером 18×8 на две части так, чтобы из них можно было составить квадрат.

Рз3. Сколькими способами можно из клетчатого квадрата 4×4 (жестко закрепленного) вырезать по линиям сетки пять уголков из трех клеток?

Рз4. Требуется разрезать по клеточкам изображенную на рисунке фигуру на несколько равных частей. Сколько частей может получиться?



Рз5. Квадрат 8×8 разбили на несколько прямоугольников 3×1 и один квадрат 1×1 . Отметьте, где при этом может стоять квадрат 1×1 .

Дроби

Д1. Приведите пример дроби, которая больше $11/19$, но меньше $7/12$.

Д2. Сколько существует дробей с числителем 2014, которые больше $1/2015$ и меньше $1/2014$?

Д3. Я отпил $1/6$ чашечки кофе и долил ее молоком. Затем выпил $1/3$ чашечки и долил ее молоком. Потом я выпил полчашечки и опять долил молоком. Наконец, я выпил полную чашечку. На сколько я выпил больше кофе, чем молока?

Д4. В школе, где учится больше 225, но меньше 245 учеников, часть учеников являются отличниками, а остальные хорошистами. После сложной контрольной работы $2/7$ отличников стали хорошистами, а хорошисты так и остались хорошистами за исключением одного человека, который стал троечником. При этом отличников и хорошистов стало поровну. Сколько учеников могло быть в школе? Приведите все возможные варианты ответа.

Д5. Число $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/2015$ записано в виде несократимой дроби. На сколько нулей оканчивается знаменатель этой дроби?

Календарь

К1. Какое наибольшее количество месяцев одного года могут иметь по пять пятниц?

К2. Укажите ближайший год, когда 26 июня снова придёт на пятницу.

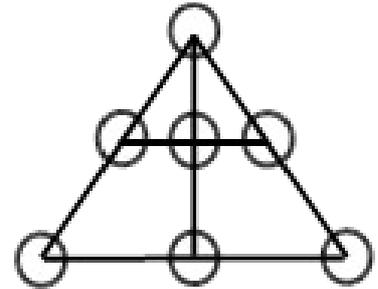
К3. В январе некоторого года было 4 пятницы и 4 понедельника. Каким днём недели было 20 января этого года?

К4. Сколько раз в году может встречаться пятница, 13-е?

К5. Сколько в XXI веке годов, которые представляются в виде суммы четырех различных натуральных степеней двойки?

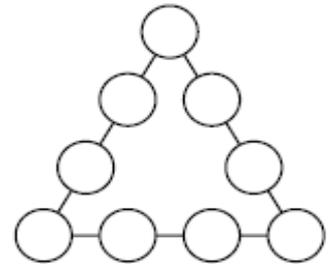
Ребусы

Ре1. Расставьте в кружках треугольника все цифры от 1 по 7 (каждое по одному разу) так, чтобы сумма чисел вдоль каждого отрезка прямой была одна и та же.

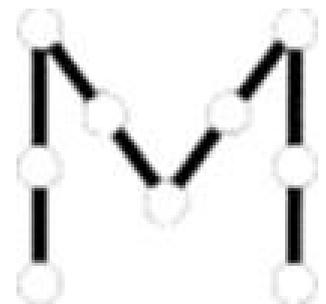


Ре2. Расставьте по кругу четыре единицы, три двойки и три тройки так, чтобы сумма любых трех подряд стоящих цифр *не* делилась на 3.

Ре3. Расставьте числа 1, 2, 3, ..., 9 в кружочках так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника равнялась 17.



Ре4. В кружки буквы М впишите все цифры от 1 до 9 так, чтобы все суммы из трех чисел, стоящих по линиям буквы, были равными и наименьшими из возможных. (Приведите пример и укажите сумму)



Ре5. Расставьте на диагоналях и сторонах пятиугольника все 10 цифр так, чтобы сумма цифр на отрезках, выходящих из одной вершины, оканчивалась на 0.

7 класс

Логика

Л1. Три брата вернулись с рыбалки. Мама спросила у каждого, сколько они вместе поймали рыб. Вася сказал: “Больше десяти”, Петя: “Больше восемнадцати”, Коля: “Больше пятнадцати”. Сколько могло быть поймано рыб (укажите все возможности), если известно, что два брата сказали правду, а третий – неправду?

Л2. В один из городов острова рыцарей и лжецов приехал Фантомас. Некоторые жители побеседовали с Фантомасом, а некоторые из тех, кто побеседовал, даже пригласили его в гости. На вопрос “Вы разговаривали с Фантомасом?” положительно ответили 50% горожан, а на вопрос “Вы пригласили его в гости?” - 60%. Кого больше среди тех, кто разговаривал с Фантомасом, но не пригласил его в гости, рыцарей или лжецов и на сколько процентов от общего числа жителей?

Л3. Саня дружит с Алексеем, Верой, Глебом, Дашей и Евгением. У него День Рождения. Если пригласить Алексея, то тогда надо пригласить и Веру. Обязательно нужно пригласить либо Глеба, либо Веру, но приглашать их вместе не стоит. Также нужно пригласить либо Дашу, либо Евгения, либо обоих вместе. Дашу можно приглашать либо вместе с Глебом, либо никого из них. А если пригласить Евгения, то тогда необходимо пригласить Алексея и Дашу. Кого же всё-таки надо пригласить?

Л4. За круглым столом стоят 2015 человек. Каждый из них — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Оказалось, что рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец. Каждого из сидящих за столом спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. Несколько человек ответили, что один, а все остальные — что два. Какое наименьшее количество лжецов может сидеть за столом?

Л5. В компании из 100 друзей, среди которых есть рыцари, лжецы и нормальные люди были произнесены следующие высказывания: «Среди моих друзей 0 лжецов»; «Среди моих друзей 1 лжец»; и т.д. до фразы «Среди моих друзей 99 лжецов». Через минуту в той же компании прозвучали те же фразы, но каждую фразу произнёс не тот человек, что в первый раз. Еще через минуту в той же компании прозвучали те же фразы, но ни один человек не повторил уже произнесенных им фраз, и так далее. Каждый произнёс 99 различных фраз. Сколько лжецов могло находиться в этой компании?

Геометрия

Г1. Разделите прямоугольник размером 18×8 на две части так, чтобы из них можно было составить квадрат.

Г2. Из середины M стороны AB равностороннего треугольника ABC опустили перпендикуляры MK и ML на стороны AC и BC . Найдите KL , если $AB = 1$.

Г3. Сколькими способами можно из клетчатого квадрата 4×4 (жестко закрепленного) вырезать по линиям сетки пять уголков из трех клеток?

Г4. Приведите пример семиугольника, который можно разрезать на параллелограммы. Покажите на чертеже, как это сделать.

Г5. В остроугольном треугольнике ABC : $\angle A = 30^\circ$; BB_1 и CC_1 – высоты; B_2 и C_2 – середины сторон AC и AB соответственно. Под каким углом пересекаются прямые B_1C_2 и C_1B_2 ?

Суммы и произведения

С1. Найдите сумму $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \dots - 2015$.

С2. Чему равно произведение $(1 - 1/4) \cdot (1 - 1/9) \cdot \dots \cdot (1 - 1/400)$?

С3. Найдите знакочередующуюся сумму $502 \cdot 500 - 503 \cdot 499 + 504 \cdot 498 - 505 \cdot 497 + \dots + 1000 \cdot 2 - 1001 \cdot 1$.

С4. Чему равно произведение $(2^3 - 1)/(2^3 + 1) \cdot (3^3 - 1)/(3^3 + 1) \cdot \dots \cdot (100^3 - 1)/(100^3 + 1)$?

С5. Запишите арифметическое выражение $(3^2 + 1)(3^4 + 1) \cdot \dots \cdot (3^{2^n} + 1)$ без скобок и многоточий.

Алгебра

А1. Частное от деления двух одночленов равно $9x^2y$, а их произведение равно x^8y^9 . Чему они могут быть равны?

А2. Говядина без костей стоит 450 рублей за килограмм, говядина с костями – 390 рублей за килограмм, а кости без говядины – 75 рублей за килограмм. Сколько костей в килограмме говядины?

А3. Числа a , b и c таковы, что выражения $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$, $\frac{c+a}{b}$ принимают одинаковое значение. Какое?

А4. Известно, что $(a - b + 2015)$, $(b - c + 2015)$ и $(c - a + 2015)$ — три последовательных целых числа. Найдите эти числа.

А5. Для перевозки почты из почтового отделения на аэродром был выслан автомобиль «Москвич». Самолёт с почтой приземлился раньше установленного срока, и привезённая почта была отправлена в почтовое отделение на попутной грузовой машине. Через 30 мин. езды грузовая машина встретила на дороге «Москвич», который принял почту и, не задерживаясь, повернул обратно. В почтовое отделение «Москвич» прибыл на 20 мин. раньше, чем обычно. На сколько минут раньше установленного срока приземлился самолёт?

Последовательные числа

П1. Найдите восемь последовательных целых чисел, сумма первых трех из которых равна сумме остальных пяти. Укажите все варианты.

П2. Сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы получить трехзначное число, записываемое одинаковыми цифрами?

П3. Среди чисел $1, 2, \dots, n$ ровно восемь чисел делятся на 6 и ровно шесть чисел делятся на 7. Найдите число n .

П4. На какую цифру может оканчиваться сумма первых n подряд идущих натуральных чисел?

П5. Сумма цифр нескольких (не менее двух) натуральных последовательных чисел равна 15. Сколько может быть чисел? Укажите все варианты.

8 класс

Комбинаторика

К1. Заведующая библиотекой, увидев, что 8 томов «Малой энциклопедии козлов» стоят в беспорядке, указала на это библиотекаря. Тот в ответ заявил: «Беспорядок – небольшой, так как каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем». Сколькими способами можно расставить тома энциклопедии в соответствии с этим условием?

К2. В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых из них написан слог МА, на остальных – слог НЯ. Каждый ребенок взял по три карточки и стал составлять слова. Оказалось, что из своих карточек 20 детей могут сложить слово МАМА, 30 детей – слово НЯНЯ, а 40 детей – слово МАНЯ. У скольких детей все три карточки одинаковые?

К3. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существуют две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково наименьшее количество хороших пар?

К4. В некоторых клетках таблицы 100×100 стоят крестики. Каждый крестик является единственным либо в строке, либо в столбце. Какое наибольшее количество крестиков может стоять в таблице?

К5. В одной компании было x человек (каждый – рыцарь или лжец). Каждый произнес фразу: «Среди всех остальных (не считая меня) не больше n рыцарей и не больше k лжецов». Чему мог быть равен x в зависимости от n и k ?

Алгебра

A1. При каких целых a уравнение $ax^2+x-a^2=0$ имеет хотя бы один целый корень?

A2. Решите уравнение $\sqrt{x-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}=2$

A3. Найдите наибольшее значение выражения $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ при условии $a^2+b^2+c^2=1$.

A4. Найдите такую пару натуральных чисел n и m , что $\sqrt{n}-\sqrt{m}=\sqrt{1000}$, и сумма $n+m$ наименьшая из всех возможных.

A5. Известно, что $(2x^2-x+1)(y^2+4y+8)(z^2-2z+3)=7$. Найдите $x+y+z$.

Геометрия

Г1. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Какие углы могут быть у этого треугольника, если четырёхугольник $ABOC$ – ромб?

Г2. H – ортоцентр треугольника ABC , в котором $AC=BH$. Найдите величину угла ABC .

Г3. В кузове грузовой машины размера $3\text{м} \times 2\text{м}$ оставили бревно длиной 2 метра с гвоздем в середине. Бревно при движении автомобиля свободно каталось в кузове и царапало его. Какая часть дна кузова могла быть испорченной? Ответ дайте с помощью рисунка.

Г4. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 1:4. В каком отношении делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла?

Г5. На плоскости построили четыре окружности с центрами в вершинах прямоугольника $O_1O_2O_3O_4$ и радиусами r_1, r_2, r_3, r_4 соответственно. Оказалось, что окружности пересекаются в одной точке. Какие значения может принимать знакопеременная сумма квадратов радиусов $r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2$?

Простые числа

Пр1. На карточках по одному написаны все целые числа от 1 до 15. Одну карточку потеряли и оказалось, что сумма чисел на остальных карточках – простое число. Какая карточка могла быть потеряна? (Укажите все варианты)

Пр2. Найдите все тройки простых чисел, в которых одно равно разности кубов двух других.

Пр3. Найдите все простые числа, которые равны сумме двух простых чисел и разности двух простых чисел.

Пр4. Знайка хочет составить число из различных цифр так, чтобы любые две стоящие подряд цифры образовывали простое число. Какое наибольшее число он может получить?

Пр5. Сколькими способами число 100 можно представить в виде суммы трех простых чисел? (порядок слагаемых не важен)

Последовательные числа

По1. Найдите восемь последовательных целых чисел, сумма первых трех из которых равна сумме остальных пяти. Укажите все варианты.

По2. Сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы получить трехзначное число, записываемое одинаковыми цифрами?

По3. Среди чисел $1, 2, \dots, n$ ровно восемь чисел делятся на 6 и ровно шесть чисел делятся на 7. Найдите число n .

По4. На какую цифру может оканчиваться сумма первых n подряд идущих натуральных чисел?

По5. Сумма цифр нескольких (не менее двух) натуральных последовательных чисел равна 15. Сколько может быть чисел? Укажите все варианты.

9 класс

Комбинаторика

К1. Заведующая библиотекой, увидев, что 8 томов «Малой энциклопедии козлов» стоят в беспорядке, указала на это библиотекаря. Тот в ответ заявил: «Беспорядок – небольшой, так как каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем». Сколькими способами можно расставить тома энциклопедии в соответствии с этим условием?

К2. В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых из них написан слог МА, на остальных – слог НЯ. Каждый ребенок взял по три карточки и стал составлять слова. Оказалось, что из своих карточек 20 детей могут сложить слово МАМА, 30 детей – слово НЯНЯ, а 40 детей – слово МАНЯ. У скольких детей все три карточки одинаковые?

К3. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существуют две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково наименьшее количество хороших пар?

К4. В некоторых клетках таблицы 100×100 стоят крестики. Каждый крестик является единственным либо в строке, либо в столбце. Какое наибольшее количество крестиков может стоять в таблице?

K5. В одной компании было x человек (каждый – рыцарь или лжец). Каждый произнес фразу: «Среди всех остальных (не считая меня) не больше n рыцарей и не больше k лжецов». Чему мог быть равен x в зависимости от n и k ?

Алгебра

A1. При каких целых a уравнение $ax^2+x-a^2=0$ имеет хотя бы один целый корень?

A2. Решите уравнение $\sqrt{x-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}=2$

A3. Найдите наибольшее значение выражения $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ при условии $a^2+b^2+c^2=1$.

A4. Найдите такую пару натуральных чисел n и m , что $\sqrt{n}-\sqrt{m}=\sqrt{1000}$, и сумма $n+m$ наименьшая из всех возможных.

A5. Известно, что $(2x^2-x+1)(y^2+4y+8)(z^2-2z+3)=7$. Найдите $x+y+z$.

Геометрия

Г1. H – ортоцентр треугольника ABC , в котором $AC=BH$. Найдите величину угла ABC .

Г2. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 1:4. В каком отношении делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла?

Г3. Прямая, проходящая через вершину A и точку E на стороне BC прямоугольника $ABCD$, делит прямоугольник на две части: треугольник ABE и трапецию $AECD$. Известно, что $S_{ABE}/S_{AECD} = 1/6$. Найдите BE/EC .

Г4. На плоскости построили четыре окружности с центрами в вершинах прямоугольника $O_1O_2O_3O_4$ и радиусами r_1, r_2, r_3, r_4 соответственно. Оказалось, что окружности пересекаются в одной точке. Какие значения может принимать знакопеременная сумма квадратов радиусов $r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2$?

Г5. В трапеции $ABCD$ точка M лежит на боковой стороне CD и $\angle ABM = \angle CBD = \angle BCD = \alpha$. Найдите длину BM , если $AB = b$.

Простые числа

Пр1. На карточках по одному написаны все целые числа от 1 до 15. Одну карточку потеряли и оказалось, что сумма чисел на остальных карточках – простое число. Какая карточка могла быть потеряна? (Укажите все варианты)

Пр2. Найдите все тройки простых чисел, в которых одно равно разности кубов двух других.

Пр3. Найдите все простые числа, которые равны сумме двух простых чисел и разности двух простых чисел.

Пр4. Знайка хочет составить число из различных цифр так, чтобы любые две стоящие подряд цифры образовывали простое число. Какое наибольшее число он может получить?

Пр5. Сколькими способами число 100 можно представить в виде суммы трех простых чисел? (порядок слагаемых не важен)

Последовательности

По1. В последовательности $\{a_n\}$ сумма любых трёх подряд идущих чисел равна 2004, причём $a_4=668$, $a_{200}=667$. Чему равно a_{2004} ?

По2. В последовательности x_1, x_2, \dots, x_{100} каждый член x_k на k больше суммы всех предыдущих членов, $x_1=1$. Найдите сумму первых 100 членов последовательности.

По3. Составьте из элементов последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, арифметическую прогрессию длины 5.

По4. Толя выложил в ряд 101 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между каждыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между каждыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между каждыми двумя трёхкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько трёхкопеечных монет могло быть у Толи?

По5. В магазин завезли 20 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывает средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщает, на сколько человек хватит оставшегося сыра, если все будут покупать именно по этому среднему весу. После каждой из первых десяти покупок продавщица сообщала, что сыра хватит еще ровно на 10 человек. Какое количество сыра могло остаться после первых десяти покупок?

Источник: www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html