Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования
Филиал Малого мехмата МГУ

ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
6 И 7 КЛАССОВ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Москва
9 марта 2012 года

Результаты Городской устной математической олимпиады будут размещены в сети Интернет на сайте

http://www.mccme.ru/ustn/

Олимпиада проводится на базе следующих школ:
гимназия №1514, ЦО №218,
школа-интернат «Интеллектуал»

Варианты подготовили:

А. Банникова, *А. Блинков*, *Е. Гладкова*, *Н. Мартынова*, *П. Мартынов*, *Н. Нетрусова*, *И. Раскина*, *Д. Селегей*, *А. Хачатурян*, *А. Шаповалов*, *Д. Шноль*

Городская устная математическая олимпиада.
Задачи и решения.

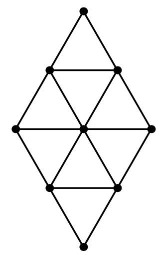
Технический редактор: *А. Горская*

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 класс

Первый тур (каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. УГОЛКИ. Покажите, как разрезать квадрат размером 5×5 клеток на «уголки» шириной в одну клетку так, чтобы все «уголки» состояли из разного количества клеток. (*Длины «сторон» уголка могут быть как одинаковыми, так и различными*).



2. РОМБ. Из 16 спичек сложен ромб со стороной в две спички и разбит на треугольники со стороной в одну спичку (см. рисунок). А сколько спичек потребуется, чтобы сложить ромб со стороной в 10 спичек, разбитый на такие же треугольники со стороной в одну спичку?

3. ТРЕУГОЛЬНИК. Города A, B и C вместе с соединяющими их прямыми дорогами образуют треугольник. Известно, что прямой путь из A в B на 200 км короче объезда через C, а прямой путь из A в C на 300 км короче объезда через B. Найдите расстояние между городами B и C.

Второй тур (каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. ТИГРОВЫЙ РЕБУС. В равенстве ТИХО + ТИГР = СПИТ замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы — разными цифрами так, чтобы ТИГР был бы как можно меньше (нулей среди цифр нет). *Объясните, почему ещё меньше ТИГР быть не может.*

5. СТАРШИЙ РЫЖИЙ РЫЦАРЬ. На острове рыцарей и лжецов путешественник пришел в гости к своему знакомому рыцарю и увидел его за круглым столом с пятью гостями.

— Интересно, а сколько среди вас рыцарей? — спросил он.

— А ты задай каждому какой-нибудь вопрос и узнай сам, — посоветовал один из гостей.

— Хорошо. Скажи мне каждый: кто твои соседи? — спросил путешественник.

На этот вопрос все ответили одинаково.

— Данных недостаточно! — сказал путешественник.

— Но сегодня день моего рождения, не забывай об этом, — сказал один из гостей.

— Да, сегодня день его рождения! — сказал его сосед.

И путешественник смог узнать, сколько за столом рыцарей. Действительно, сколько же их?

6. ВЕРЁВОЧКА. Верёвочку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а затем все слои верёвочки разрезали в каком-то месте. Какова могла быть длина верёвочки, если известно, что какие-то два из полученных кусков имели длины 9 метров и 4 метра?

Третий тур (каждая задача оценивается в 13 баллов)

7. НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ЧИСЛА. Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

8. ГИРЬКИ. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

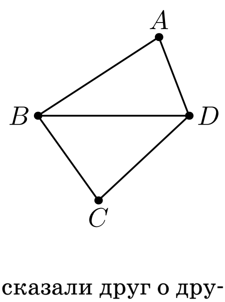
9. ДВОРЕЦ. План дворца шаха — это квадрат размером 6×6, разбитый на комнаты размером 1×1. В середине каждой стены между комнатами есть дверь. Шах сказал своему архитектору: «Сломай часть стен так, чтобы все комнаты стали размером 2×1, новых дверей не появилось, а путь между любыми двумя комнатами проходил не более, чем через N дверей». Какое наименьшее значение N должен назвать шах, чтобы приказ можно было выполнить?

7 класс

Первый тур (каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. ДРОБИ. Записаны шесть положительных несократимых дробей, сумма числителей которых равна сумме их знаменателей. Паша перевёл каждую из неправильных дробей в смешанное число. Обязательно ли найдутся два числа, у которых одинаковы либо целые части, либо дробные части?

2. ТУРИСТЫ И ДОРОГИ. На карте обозначены 4 деревни: A, B, C и D, соединённые тропинками (см. рисунок). В справочнике указано, что на маршрутах $A - B - C$ и $B - C - D$ есть по 10 колдобин, на маршруте $A - B - D$ колдобин 22, а на маршруте $A - D - B$ колдобин 45. Туристы хотят добраться из A в D так, чтобы на их пути было как можно меньше колдобин. По какому маршруту им надо двигаться?



3. НЕОБЫЧНЫЕ РАЗГОВОРЫ. Четверо детей сказали друг о друге так:

Маша: Задачу решили трое: Саша, Наташа и Гриша.

Саша: Задачу не решили трое: Маша, Наташа и Гриша.

Наташа: Маша и Саша солгали.

Гриша: Маша, Саша и Наташа сказали правду.
Сколько детей на самом деле сказали правду?

Второй тур (каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. ЧИСЛА-ДРУЗЬЯ. Назовём натуральные числа a и b *друзьями*, если их произведение является точным квадратом. Докажите, что если a — друг b, то a — друг НОД(a, b). (*Напомним, что НОД*(a, b) — *наибольший общий делитель чисел* a *и* b.)

5. РАЗБИЕНИЕ БИССЕКТРИСАМИ. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке M, а биссектриса угла A пересекает отрезок CM в точке T. Оказалось, что отрезки CM и AT разбили треугольник ABC на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

6. ЧИСЛА В ТАБЛИЦЕ. В каждой клетке таблицы 10×10 записано число. В каждой строке подчеркнули наибольшее число (или одно из наибольших, если их несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчёркнутые числа подчёркнуты ровно два раза. Докажите, что все числа, записанные в таблице, между собой равны.

Третий тур (каждая задача оценивается в 13 баллов)

7. ВОРИШКИ. На складах двух магазинов хранится пшено: на первом складе на 16 тонн больше, чем на втором. Каждую ночь ровно в полночь владелец каждого магазина ворует у своего конкурента четверть имеющегося на его складе пшена и перетаскивает на свой склад. Через 10 ночей воришек поймали. На каком складе в момент их поимки было больше пшена и на сколько?

8. РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК. Через точку Y на стороне AB равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Z, а продолжение стороны CA за точку A — в точке X. Известно, что $XY = YZ$ и $AY = BZ$. Докажите, что прямые XZ и BC перпендикулярны.

9. МИНИ-СЛОН. Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки — чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура — мини-слон, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини-слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини-слон?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

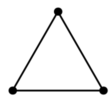
6 класс

1. Ответ: например, см. рисунки.

Покажем, из каких соображений можно придумать решение. Площадь данного квадрата — 25 клеток, а самого маленького «уголка» — 3 клетки. Поскольку площади «уголков» должны быть различными, представим число 25 в виде суммы различных слагаемых, начиная с трёх: $25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, *и разрежем квадрат на пять «уголков» с таким количеством клеток. Возможны и другие способы разрезания, использующие эти же уголки.*

Д. Шноль

2. Ответ: 320 спичек.



Первый способ. Подсчитаем количество треугольников со стороной в одну спичку, у которых спичка в основании расположена горизонтально (см. рис.). Каждый такой треугольник является верхней половинкой маленького ромбика со стороной в одну спичку. В ромбе со стороной 2 таких ромбиков $2 \times 2 = 4$, значит, в ромбе со стороной 10 таких ромбиков — $10 \times 10 = 100$.

Так как никакие два из рассматриваемых треугольников не имеют общих спичек, то на них уйдёт $100 \times 3 = 300$ спичек. Если убрать все такие треугольники, то останутся только спички, составляющие две нижние стороны большого ромба. Их — 20, значит, всего потребуется $300 + 20 = 320$ спичек.

Второй способ. Ромб со стороной в 10 спичек состоит из $10 \times 10 = 100$ маленьких ромбиков. На каждый из маленьких ромбиков уходит 5 спичек, поэтому на 100 ромбиков потребовалось бы 500 спичек, если бы некоторые из спичек не были границей двух ромбиков, а, значит, учтены дважды.

Найдем количество спичек, которые принадлежат только одному ромбику. Это — 40 спичек, образующих контур большого ромба, и 100 спичек, лежащих горизонтально. Следовательно, при первоначальном подсчете, $500 - 140 = 360$ — удвоенное количество реальных спичек. Таким образом, нам потребуется $140 + 360 : 2 = 320$ спичек.

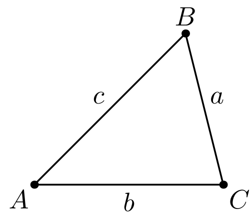
Третий способ. Подсчитаем по отдельности спички, расположенные в каждом из трёх направлений. Параллельно двум сторонам ромба расположено ещё 9 отрезков, каждый из них (включая эти стороны), состоит из десяти спичек, итого: 110 спичек. Ещё 110 спичек лежат параллельно двум другим сторонам ромба. Осталось подсчитать спички, лежащие горизонтально. Таких спичек: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+$ $+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot 2+10 = 100$.

Таким образом, потребуется $110 + 110 + 100 = 320$ спичек.

Существуют и другие способы подсчёта.

А. Шаповалов

3. Ответ: 250 км.



Рассмотрим маршрут из города B в город C через город A ($B - A - C$). Длина отрезка BA на 200 километров меньше длины маршрута $B - C - A$, а длина отрезка AC на 300 километров меньше длины маршрута $A - B - C$. Значит, такой путь окажется на 500 км короче, чем маршрут $B - C - A - B - C$. Однако, выбранный нами маршрут отличается от этого путешествия только на два отрезка прямого пути из B в C. Значит, длина отрезка BC равна $500 : 2 = 250$ (км).

Введя обозначения отрезков (см. рис.), условие задачи можно записать в виде системы уравнений: $\begin{cases} a+b-c=200 \\ a+c-b=300 \end{cases}$. *Сложив уравнения, получим, что* $2a = 500$; $a = 250$. *Отметим, что из такой записи хорошо видно, что расстояния AB и AC однозначно не определяются. Из условия задачи следует только, что* $c - b = 50$.

А. Шаповалов

4. Ответ: $1386 + 1345 = 2731$.

Чтобы ТИГР был как можно меньше, нужно сначала сделать как можно меньше цифру Т, потом — цифру И, потом — цифру Г, а потом — Р.

Нулей в этом ребусе нет, поэтому Т = 1. Тогда С — это 2 или 3. Причем, если С = 3, то И не меньше, чем 5. Если же С = 2, а И = 3, то ТИГР получится меньше. Тогда П — это 6 или 7. Возьмём Г = 4, а Р = 5 (в этом случае ТИГР будет меньше, чем в других) и попробуем подобрать оставшиеся цифры. Из равенства 13ХО + 1345 = 2П31 получим, что О = 6, Х = 8, П = 7.

Н. Нетрусова

5. Ответ: 2 рыцаря.

Если бы каждый сказал: «Оба моих соседа — рыцари», то можно было бы сразу определить, что все, сидящие за столом, — рыцари. Действительно, знакомый путешественника — рыцарь и он сказал правду, значит, оба его соседа также сказали правду, значит, и их соседи сказали правду, и так далее, то есть каждый сказал правду.

Если бы каждый сказал: «Мои соседи — рыцарь и лжец», то также можно было бы сразу определить количество рыцарей. Действительно, знакомый путешественника сказал правду, значит, его соседи — рыцарь и лжец. Сосед-рыцарь также сказал правду, значит, другой его сосед — лжец. А сосед-лжец солгал и значит, оба его соседи рыцари. Продолжая таким образом рассуждение, получим, что за столом: две пары рыцарей, сидящих рядом, и два лжеца между ними, то есть всего — 4 рыцаря.

Следовательно, каждый сказал: «Оба моих соседа лжецы». Это возможно в двух неразличимых случаях:

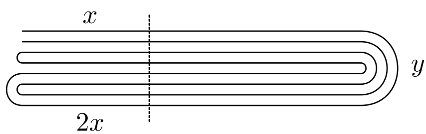
1) Если рыцари и лжецы сидели через одного, то есть за столом — 3 рыцаря и 3 лжеца.

2) Если соседи рыцарей — лжецы, а соседи лжецов — рыцарь и лжец, то есть за столом — 2 рыцаря и 4 лжеца.

После того, как двое сидящих рядом сказали одно и то же утверждение про день рождения, путешественник понял, что они оба лжецы, то есть реализуется случай 2). Таким образом, за столом — 2 рыцаря.

Д. Шноль

6. Ответ: 52 м, или 68 м, или 88 м.



При разрезании могли образоваться куски трёх различных типов (см. рис.), причём длина одного из типов кусков ровно вдвое больше, чем другого. Обозначим эти длины: x, $2x$ и y соответственно, а длину всей веревки — L. Подсчитав количество кусков каждого типа, получим, что $L = 8x + 4y = 4(2x + y)$. Все возможные, исходя из условия, варианты длин кусков представлены в таблице:

x	4	2	9	4,5
y	9	9	4	4
L	68	52	88	52

Математическая регата 2001/02 *учебного года*, 8 *класс*

7. Ответ: 99.

Найдём самое маленькое число, представимое в виде произведения двух трёхзначных чисел: $100 \times 100 = 10000$. Следующее такое число: $101 \times 100 = 10100$, а остальные числа, являющиеся произведением двух трёхзначных, — ещё больше, поэтому числа 10001, 10002, ..., 10099 — неразложимые. Таким образом, указано 99 идущих подряд неразложимых пятизначных чисел.

Больше, чем 99 неразложимых чисел идти подряд не может, поскольку каждое сотое пятизначное число оканчивается на два нуля, значит, его можно представить в виде произведения трёхзначного числа и числа 100.

С. Берлов. Олимпиада Санкт-Петербурга, 1998 г., 6 класс, 2 тур

8. Ответ: нет, нельзя.

Предположим, что можно разложить гирьки в соответствии с условием задачи. Найдём сумму масс всех гирек: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100 = 100 + (1 + 99) + (2 + 98) + \ldots + (49 + 51) + 50 = 50 \cdot 100 + 50 = 5050$. Заметим, что масса самой тяжёлой кучки должна быть больше, чем среднее арифметическое масс всех кучек, то есть больше, чем 505. Так как в нашем наборе нет гирек, у которых масса больше, чем 100, то в самой тяжёлой кучке должно быть не меньше, чем 6 гирек. Тогда в следующей (по массе) кучке должно быть не меньше, чем 7 гирек, в следующей — не меньше, чем 8 гирек, и так далее, то есть в самой лёгкой кучке должно быть не меньше, чем 15 гирек.

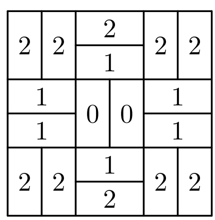
Значит, общее количество гирек должно быть не меньше, чем $6 + 7 + 8 + \ldots + 15 = 105 > 100$, что противоречит условию.

С. Токарев. Из задач турнира математических боев имени А.П. Савина

9. Ответ: $N = 5$.

Рассмотрим произвольный маршрут из левого нижнего угла дворца в правый верхний угол. Оценим количество дверей, которые пришлось бы преодолеть шаху до перестройки. Так как ему надо «подняться» на 5 горизонталей и «сместиться вправо» на 5 вертикалей, то придётся пройти, как минимум, через 10 дверей, посетив при этом не меньше, чем 11 комнат (включая начальную и конечную).

В перестроенном дворце некоторые пары соседних комнат могли образовывать одну, однако, 11 комнат размером 1×1 не могли превратиться в 5 комнат размером 2×1. Следовательно, тот же маршрут в перестроенном дворце должен проходить, как минимум, через 6 комнат, а значит, не менее, чем через 5 дверей.



Такая перестройка дворца действительно возможна, например, см. рисунок. Покажем, что в этом случае действительно можно будет попасть из любой комнаты в любую другую, пройдя не более чем через 5 дверей. Обозначим центральные комнаты цифрой 0, связанные с ними дверью — цифрой 1, а связанные дверью с комнатами «типа 1» — цифрой 2. Поскольку оказались обозначены все комнаты, то из любой комнаты можно попасть в одну из центральных, пройдя не более двух дверей. Значит, из любой комнаты можно попасть в любую, построив маршрут через центральные комнаты, и пройдя тем самым не более, чем через 5 дверей (пятая дверь потребуется в случае, если по пути придётся перейти из одной центральной комнаты в другую). Таким образом, $N = 5$.

Существуют и другие примеры.

А. Шаповалов

7 класс

1. Ответ: нет, не обязательно.

Например, рассмотрим дроби: $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$; $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$; $\frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$; $\frac{31}{6} = 5\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{56}$. Сумма их числителей, так же, как и сумма их знаменателей, равна 76. При этом, и целые части полученных чисел, и их дробные части попарно различны.

Приведённый пример далеко не единственный (их — бесконечно много). Подбирать пример можно, в частности, из следующих соображений: сначала выбрать пять произвольных несократимых неправильных дробей с различными знаменателями и различными целыми частями, затем подсчитать сумму их числителей и сумму их знаменателей. Если первая сумма больше второй на n, то последняя дробь может, например, иметь вид $\frac{1}{n+1}$. В этом случае её целая часть равна нулю, её дробная часть меньше, чем у любой ранее выбранной дроби, и она заведомо несократима.

Отметим, что аналогичным образом можно подобрать любое количество дробей, обладающих указанными свойствами.

Н. Мартынова, П. Мартынов

2. Ответ: по маршруту $A - B - C - D$.

Существует три возможных маршрута из A в D: 1) $A - D$; 2) $A - B - D$; 3) $A - B - C - D$.

Из того, что на маршруте $A - B - D$ находятся 22 колдобины, следует, что на тропинке $B - D$ их не больше, чем 22, значит, из 45 колдобин маршрута $A - D - B$ не меньше, чем 23 колдобины находятся на тропинке $A - D$. Таким образом, маршрут 2) выгоднее, чем маршрут 1).

Аналогично, поскольку на маршруте $A - B - C$ есть 10 колдобин, то на тропинке $A - B$ их не более, чем 10. Значит, из двадцати двух колдобин маршрута $A - B - D$ не менее двенадцати приходится на тропинку $B - D$. Но на участке $B - C - D$ есть только 10 колдобин, поэтому он выгоднее, чем $B - D$, то есть маршрут 3) выгоднее маршрута 2).

Таким образом, третий маршрут выгоднее как второго, так и первого.

Олимпиада Санкт-Петербурга, 2001 *г.*
(6 *класс*, *районный тур*)

3. Ответ: один ребёнок.

Высказывания Маши и Саши противоречат друг другу, значит, хотя бы один из них солгал. Следовательно, Гриша наверняка солгал. Далее возможны два случая:

1) Пусть Наташа сказала правду, тогда солгали и Маша, и Саша, то есть правду сказал один ребёнок.

2) Пусть Наташа солгала, тогда правду сказала либо Маша, либо Саша. И в этом случае получается, что сказал правду один ребёнок.

Фольклор (*по мотивам задачи XI Уральского турнира*, 1998 *г.)*

4. *Первый способ.* Пусть $d = \text{НОД}(a; b)$. Тогда числа a и b можно представить в виде: $a = md$, $b = nd$, где m и n — натуральные числа, причем $\text{НОД}(m, n) = 1$. Из условия задачи следует, что число $ab = mnd^2$ является точным квадратом, значит точным квадратом является и число mn. Тогда, так как числа m и n — взаимно простые, то каждое из них является точным квадратом.

Таким образом, введя обозначение $m = k^2$, получим, что

$$a \cdot \text{НОД}(a; b) = md^2 = (kd)^2,$$

то есть a — друг $\text{НОД}(a, b)$, что и требовалось.

Второй способ. Число является точным квадратом, если в его разложение на простые множители каждый из них входит с чётным показателем степени.

Разложим числа a и b на простые множители. Так как a и b — друзья, то каждое простое число входит в эти разложения с показателями степеней одинаковой чётности (если множитель не содержится в одном из разложений, то его показатель степени равен нулю — чётный, а в другое разложение этот множитель входит с чётным показателем).

Так как в разложение $\text{НОД}(a; b)$ каждый простой множитель входит с наименьшим показателем из этих двух, то в разложения чисел a и $\text{НОД}(a, b)$ каждое простое число также входит с показателями степеней одинаковой чётности. Следовательно, в разложении их произведения все простые множители окажутся с чётными показателями степеней, а это как раз и означает, что a и $\text{НОД}(a, b)$ — друзья.

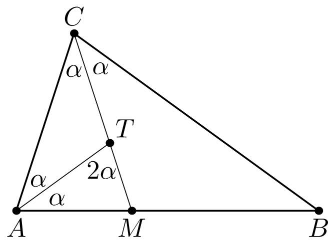
Олимпиада Колумбии, 2004 *г.*

5. Ответ: два угла по 72° и угол 36°.

Так как сумма углов A и C треугольника ABC меньше, чем 180°, то $\angle TAC + \angle TCA < 90^\circ$, поэтому угол ATC — тупой (см. рис.). Значит, в равнобедренном треугольнике ATC сторона AC является основанием. Тогда $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$, поэтому $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$. Угол ATM — внешний для треугольника ATC, значит, $\angle ATM = 2\alpha$.

Рассмотрим треугольник ATM, который также является равнобедренным (по условию). Если ATM — его угол при вершине, то $\angle TMA = \angle TAM = \alpha$, тогда сумма углов этого треугольника равна 4α, и равна

180°, но это невозможно, поскольку в этом случае и сумма углов A и C исходного треугольника будет равна 180°. Значит, ATM — угол при основании этого треугольника. В этом случае сумма углов треугольника ATM равна 5α. Из равенства $5\alpha = 180^\circ$ получим, что $\alpha = 36^\circ$, тогда $\angle BAC = \angle BCA = 72^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA) = 36^\circ$.

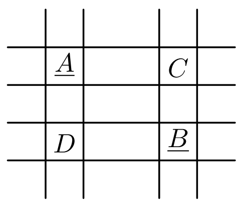


В этом случае треугольник CMB (третий треугольник разбиения) также оказывается равнобедренным, так как $\angle MCB = \angle MBC = 36^\circ$.

Отметим, что можно проводить аналогичные рассуждения, рассматривая треугольники разбиения в другом порядке.

Н. Мартынова, П. Мартынов

6. *Первый способ.* Рассмотрим два произвольных подчёркнутых числа A и B. Из условия задачи следует, что они расположены в разных строках и в разных столбцах. Пусть на пересечении строки, в которой находится число A, и столбца, в котором находится число B, стоит число C, а на пересечении строки, в которой находится число B, и столбца, в котором находится число A, стоит число D (см. рис.). По условию задачи $B \leqslant C \leqslant A$ и $A \leqslant D \leqslant B$. Следовательно, $A = B = C = D$.



Таким образом, любые два подчёркнутых числа равны. Рассмотрим теперь произвольное число таблицы, которое не подчёркнуто. Оно не меньше числа, подчёркнутого в его столбце, и не больше числа, подчёркнутого в его строке, следовательно оно им равно. Значит, все числа, записанные в таблице, между собой равны.

Второй способ. Пусть среди чисел, записанных в таблице, наибольшим является число A. Если оно одно, то оно подчёркнуто, а если таких чисел несколько, то подчёркнуто хотя бы одно из них (так как в своей строке это число должно быть наибольшим).

Рассмотрим это подчёркнутое число A (выделено цветом, см. рис.). Так как (по условию) оно подчёркнуто дважды, то в своем столбце k оно является наименьшим, значит, в этом столбце все числа равны A (чисел, больших A, в таблице нет), причём остальные числа столбца k не подчёркнуты. Выберем одно из них, тогда в строке m, где оно находится, должно быть подчёркнутое другое число A. Это число, в свою очередь, является наименьшим в своем столбце n, значит остальные числа в столбце n также равны A.

		n			k					
		A			A					
		A			A					
		$\underline{A}$			A					m
		A			A					
		A			$\underline{A}$					
		A			A					
		A			A					
		A			A					
		A			A					
		A			A					

Выбрав другое A из столбца k и проведя аналогичное рассуждение, получим, что ещё один столбец содержит только числа, равные A. Этот столбец не может совпасть со столбцом n, так как в каждом столбце подчёркнуто только одно число. Повторяя рассуждение для каждого следующего числа A из столбца k, получим, что каждый столбец таблицы содержит только числа, равные A, что и требовалось.

Отметим, что аналогичное рассуждение, основанное на «принципе крайнего», можно было начать и с наименьшего числа таблицы.

Третий способ. Пусть в первой строке подчёркнуто число a_1, во второй — a_2, и так далее, в десятой строке подчёркнуто число a_{10}. Так как в каждой строке подчёркнуто наибольшее число, то сумма чисел каждой строки не превышает подчёркнутого в этой строке числа, умноженного на 10, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда все числа в этой строке одинаковы. Следовательно, $S_1 \leqslant 10a_1$, $S_2 \leqslant 10a_2$, ..., $S_{10} \leqslant 10a_{10}$ (через S_k обозначена сумма чисел в соответствующей строке). Тогда сумма всех чисел таблицы $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{10} \leqslant 10(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10})$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда в каждой строке все числа одинаковы.

Проведя аналогичное рассуждение о наименьших числах в столбцах и учитывая, что подчёркнуты те же самые числа, получим, что $S \geqslant 10(a_1+a_2+\ldots+a_{10})$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда в каждом столбце все числа одинаковы.

Таким образом, $S = 10(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10})$, поэтому и в каждой строке, и в каждом столбце стоят одинаковые числа. Это и означает, что все числа в таблице между собой равны.

I *Пермский областной турнир юных математиков* (*олимпиада* 6–7 *класса*)

7. Ответ: на первом складе было больше на $\frac{1}{64}$ тонны.

Пусть в какой-то момент до полуночи на первом складе находится A тонн пшена, а на втором — B тонн. Тогда после полуночи на первом складе станет $0{,}75A + 0{,}25B$ (т), а на втором — $0{,}75B + 0{,}25A$ (т). Значит, разность между количеством пшена на первом и втором складах составит $(0{,}75A + 0{,}25B) - (0{,}75B + 0{,}25A) = 0{,}5(A - B)$ (т), то есть эта разность уменьшится в два раза по сравнению с рассматриваемым моментом.

Таким образом, за каждую ночь разность между количеством пшена на складах уменьшается в два раза. Так как в начале эта разность составляла 16 тонн, то через 10 ночей она будет равна $\frac{16}{2^{10}} = \frac{2^4}{2^{10}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ (т), причём на первом складе будет по-прежнему больше пшена, чем на втором.

Фольклор в обработке Н. Мартыновой и П. Мартынова

8. *Первый способ*. Отметим на стороне AC точку T так, что $AT = AY$, тогда $TC = CZ$ (см. рис. 1). Каждый из треугольников ATY и CTZ является равнобедренным с углом 60°, поэтому они оба — равносторонние. Следовательно, $\angle YTZ = 180^\circ - (\angle ATY + \angle CTZ) = 60^\circ$. Тогда в треугольнике XTZ отрезок TY является биссектрисой (так как $\angle YTZ = \angle YTX$) и медианой (по условию). Поэтому треугольник XTZ — равнобедренный, а TY — его высота.

Кроме того, так как $\angle YTZ = \angle CZT$, то $TY || CZ$. Так как $XZ \perp TY$, $TY || BC$, то $XZ \perp BC$, что и требовалось.

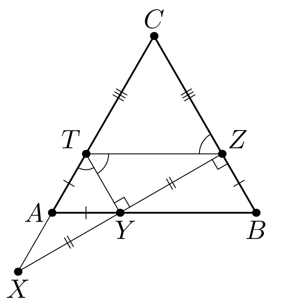


Рис. 1

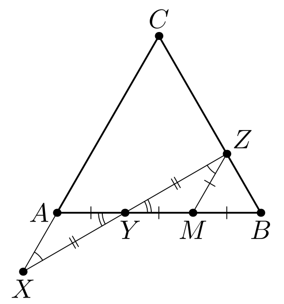


Рис. 2

Второй способ. Через точку Z проведём прямую, параллельную стороне AC, которая пересечет сторону AB в точке M (см. рис. 2). Углы треугольника BZM равны по 60°, поэтому он — равносторонний. Значит, $BM = MZ = BZ = AY = a$.

Кроме того, из параллельности ZM и AC следует, что $\angle YZM = \angle YXA$, тогда треугольники MYZ и AYX равны (по данным равным сторонам и двум прилежащим к ним углам). Следовательно, $AX = MZ = a = AY = MY$.

Завершить это доказательство можно по-разному, например, вычислить углы равных треугольников MYZ и AYX: 120°, 30° и 30° (поскольку каждый из них равнобедренный) и получить, что $\angle BZY = \angle BZM + \angle MZY = 90^\circ$, либо заметить, что медиана ZM треугольника BZY равна половине его стороны BY, поэтому этот треугольник прямоугольный: $\angle BZY = 90^\circ$.

Третий способ. Отметим на стороне AC точку P так, что $CP = AY = BZ$ (см. рис. 3). Тогда $CZ = AP = BY$. Следовательно, треугольники CZP, APY и BYZ равны (по двум сторонам и углу между ними), значит, $ZP = PY = YZ$, то есть треугольник ZPY — равносторонний.

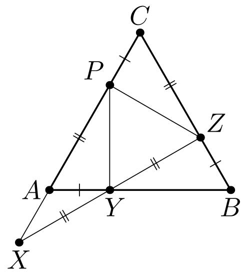


Рис. 3

Кроме того, в треугольнике XPZ медиана PY равна половине стороны XZ, поэтому $\angle XPZ = 90^\circ$. Тогда $\angle CZP = \angle APY = \angle XPZ - \angle YPZ = 30^\circ$, а $\angle CZX = \angle CZP + \angle YZP = 90^\circ$.

XIX *Уральский турнир юных математиков*, 2002 *г.*

9. Ответ: 12.

Приведём вначале пример маршрута мини-слона, который обеспечит посещение им двенадцати клеток (см. рис., числа от 1 до 12 показывают порядок обхода клеток).

1		4		6
	2		5	
3		7		9
	11		8	
12		10		

Докажем теперь, что все 13 черных клеток мини-слон обойти не сможет. Рассмотрим четыре угловые клетки. Выйти из таких клеток мини-слон может либо в соседнюю клетку, либо в центральную. В соседнюю клетку из угловой он может пойти только первым ходом. Действительно, попасть в угловую клетку можно либо из соседней, либо из центральной, перепрыгнув через уже пройденную соседнюю. В обоих случаях, снова пойти в соседнюю клетку мини-слон не сможет. В центральную клетку из угловой мини-слон может пойти также не более одного раза. Таким образом, покинуть угловые клетки мини-слон сможет не более двух раз, значит он сможет посетить не более трёх угловых клеток.

Пример, когда мини-слон посетил ровно три угловые клетки, приведён выше.

В. Клепцын

Математические кружки в Центре Образования №218

В ЦО №218 продолжает работу филиал Малого мехмата МГУ (5–7 классы) и матем. кружки для 8 и 9 классов. Присоединиться к работе кружка можно на любом занятии. Занятия бесплатные. Адрес: Дмитровское шоссе, д. 5а (ст.м. «Дмитровская», «Тимирязевская»), тел. (499) 976-19-85. Расписание занятий: http://www.school218.ru

ЦО №218 объявляет набор учащихся на 2012/13 учебный год

Набор и добор на обучение по инд. уч. планам в 8–10 классы. Разноуровневое обучение — 6 и 7 классы. Справки по тел. (499) 976-19-85 пн, ср, птн. 16.00–18.00. Подробная информация на сайте
http://school218.ru/taxonomy/term/89.

Школа №192 объявляет набор учащихся на 2012/13 уч. год

С 6 апреля 2012 года начнется набор в предпроф., проф. и лицейские классы: 7 биохим, 7 физмат, 9 физхим с угл. изучением мат-ки, а также добор в существующие лицейские классы естеств.-научн. профиля: 8-10 биохим, физмат и физхим. Также осуществляется добор в 7-10 проф. естеств.-научн. и в 5 предпроф. классы. Справки по телефону (499) 137-33-55. Подробная информация на сайте: http://www.s192.ru/

Набор в гимназию №1514

Гимназия №1514 объявляет добор учащихся на 2012/2013 уч. год в 8 класс с угл. изуч. матем., программ. и физики. Приглашаем победителей и призеров олимпиад. Справки по тел. (499) 131-80-38 в раб. дни с 9-00 до 15-00. Подробная информация на сайте http://www.1514.ru.

Набор в школу-интернат «Интеллектуал»

Школа-интернат "Интеллектуал"объявляет набор в 5 класс, а также добор в 7 класс. Первый тур приёмных испытаний — 18 марта. Нужна электронная регистрация на сайте школы http://sch-int.ru. Адрес: Кременчугская ул., д.13 (499) 445-5210.

Летняя школа интенсивного обучения "Интеллектуал"для детей, окончивших 7 и 8 класс и интересующихся математикой, физикой и химией, состоится 2-17 июня 2012 года. Подробная информация на сайте: http://www.sch-int.ru/summer/.

Московская гимназия на Юго-Западе №1543 объявляет набор в 8-е профильные классы

Набираются математический, физико-химический классы (первый экзамен: математика (письменно) 5 апреля), биологический (первый экзамен: биология (письменно) 3 апреля) и историко-филологический (первый экзамен: русский язык (диктант) 27 марта). Начало экзаменов в 16 часов. Возможен добор в старшие профильные классы.

Адрес гимназии №1543: ул. 26 Бакинских комиссаров, д. 3, к. 5. Гимназия находится в 10 минутах ходьбы от ст. м. «Юго-Западная». Справки по тел. 433-16-44. http://1543.ru http://s43.mccme.ru/math/