XXIII Устная городская математическая олимпиада для 6-7 классов
05.04.2026
Решения задач
7 класс

1. Викторина. Костя, Миша и Антон участвовали в школьной викторине. Всего было меньше чем 60 вопросов, на каждый из которых отвечал ровно один из участников (тот, кто нажимал кнопку первым). За верный ответ давалось 10 очков, а за неверный снималось 10 очков. Все участники дали одинаковое количество верных ответов, но в итоге оказалось, что Костя и Миша набрали по 110 очков каждый, а Антон — минус 100 очков. Сколько очков набрал бы Антон, если бы он ответил верно на все свои вопросы?

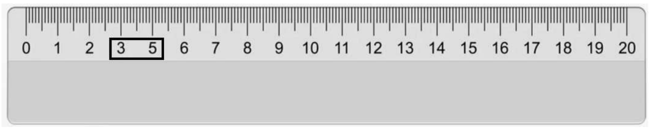
М. Евдокимов

Ответ: 320.

Решение. Так как Костя и Миша дали одинаковое количество верных ответов и набрали одинаковое количество очков, то и количество неверных ответов у них одинаковое. Пусть оно равно x, тогда, так как они набрали по 110 очков, то каждый из них верно ответил на $11 + x$ вопросов (x верных ответов и x неверных друг друга скомпенсировали).

Так как Антон набрал минус 100 очков, то он неверно ответил на $x + 21$ вопрос. Таким образом, всего было задано $3(11 + x) + 2x + x + 21 = 54 + 6x$ вопросов. Так как по условию $54 + 6x < 60$, то $x < 1$, то есть $x = 0$. Значит, каждый из ребят верно ответил на 11 вопросов, Костя и Миша ошибок не допустили, а Антон ошибся 21 раз. Если бы он не ошибался, то ответил бы верно на 32 вопроса и набрал бы 320 очков.

2. Испорченная рулетка. Хулиган Вася вырезал из рулетки диапазон в 1 см и склеил концы (фрагмент рулетки показан на рисунке). Ваня этого не заметил и стал измерять с её помощью длину каждой стороны и каждой диагонали некоторого прямоугольника. Он прикладывал рулетку по-разному (не обязательно с нулевой отметки) и находил длину каждого отрезка как разность между значениями, соответствующими концам измеряемого отрезка. Мог ли он в результате таких измерений получить длины 2 см, 3 см, 4 см, 5 см, 6 см и 7 см в каком-то порядке?



И. Ященко

Ответ: не мог.

Решение. Длины сторон и диагоналей прямоугольника разбиваются на три пары равных чисел. Так как из рулетки вырезан ровно 1 см, то в результате измерений сторонам должны соответствовать пары (2; 3) и (4; 5), а диагоналям — пара (6; 7). При этом реальные значения длин — это меньшее из двух чисел в каждой паре, то есть длины сторон и диагоналей прямоугольника — это 2 см, 4 см и 6 см соответственно. Но такого прямоугольника не существует, так как для двух соседних сторон и диагонали не выполняется неравенство треугольника.

3. Игральные карты. Есть колода, в которой 36 карт четырёх мастей. Её разложили на четыре кучки по кругу, обходя его в одном направлении и беря каждый раз по одной карте подряд так, как они лежат в колоде. В итоге в каждой кучке оказалась только одна масть. Известно, что за дамой треф в колоде шла чёрная карта. А какого цвета была следующая карта после дамы пик? (*Пики и трефы — черные масти, червы и бубны — красные*.)

А. Пешнин

Ответ: красная

Решение. Занумеруем масти в произвольном порядке цифрами от 0 до 3, тогда из условия следует, что в колоде они лежали так: 01230123... . Так как за дамой треф шла чёрная карта, то это могла быть только пика. Тогда после любой пиковой карты могла лежать только красная карта.

Также можно занумеровать все карты в колоде в том порядке, как они лежат. Тогда можно провести рассуждение, используя, что 0, 1, 2 и 3 — это остатки от деления номеров карт на 4.

4. Подстановка. Петя подставил целые числа в выражение $5xyz + 4xy + 2026z$ и получил значение –1. Может ли он изменить коэффициент у каждого одночлена на единицу так, чтобы при точно такой же подстановке получилось значение 1?

А. Пешнин

Ответ: не может.

Решение. Пусть такое возможно. При первой подстановке значение выражения нечётно, но второй и третий одночлены имеют чётные коэффициенты. Поэтому значение выражения $5xyz$ нечётно. Такое возможно только в случае, когда нечётно значение каждой из переменных x, y и z. После указанного изменения коэффициентов первый коэффициент станет чётным, а два других — нечётными. Тогда при подстановке тех же значений переменных получится сумма чётного числа и двух нечётных, которая будет чётной, поэтому не будет равна 1.

Подстановка, указанная в условии, существует. Например, $x = 2025$, $y = -1$, $z = -1$.

5. Равнобедренный треугольник. Боковая сторона AB равнобедренного треугольника ABC вдвое больше основания AC. На биссектрисе угла A отмечена точка K так, что $KC = AC$. Докажите, что угол AKB прямой.

М. Евдокимов

Решение. <u>Первый способ</u>. Отметим середину M стороны AB (см. рис. 5а). Тогда треугольники AMK и ACK равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $KM = KC = AC = AM = BM$. Следовательно, в треугольнике AKB медиана KM в два раза меньше стороны, к которой она проведена, значит, угол AKB прямой.

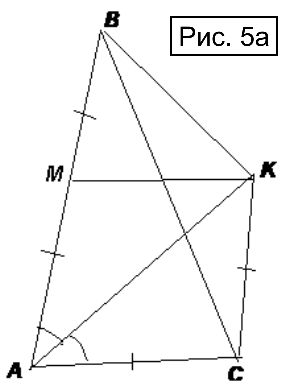


Рис. 5а

Отметим, что из этого рассуждения следует, что $MK \parallel AC$, а четырёхугольник $AMKC$ — ромб.

<u>Второй способ</u>. На луче AC отметим точку D так, что $DC = AC$ (см. рис. 5б). Тогда треугольник AKD — прямоугольный с гипотенузой AD. Кроме того, $AD = AB$, поэтому треугольники AKB и AKD равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle AKB = \angle AKD = 90°$.

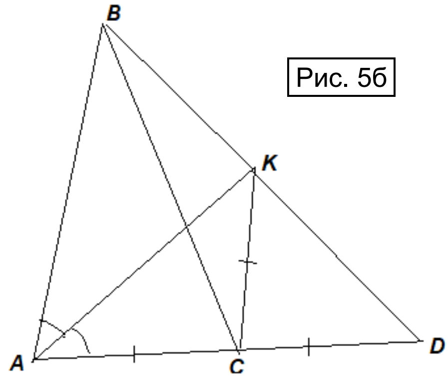


Рис. 5б

Эту же идею можно реализовать иначе, изменив последовательность дополнительных построений. А именно, сначала провести перпендикуляр BK' к биссектрисе угла A и продолжить его до пересечения с лучом AC в точке D. Тогда в треугольнике BAD биссектриса совпадает с высотой, поэтому $AD = AB = 2AC$, откуда $DC = AC = K'C$. Следовательно, точка K' совпадает с точкой K (обе лежат на биссектрисе угла и удалены от точки C на расстояние AC).

6. Числа на карточках. Таня написала невидимыми чернилами на трёх карточках числа 1, 2, 3, 4, 5, n (по одному числу с каждой стороны) и сообщила Ане этот набор чисел. Аня может выложить карточки любой стороной и спросить сумму чисел на тех сторонах всех трёх карточек, которые окажутся сверху, и сделать это несколько раз. После этого она должна верно назвать хотя бы одно число, указав, на какой карточке и на какой её стороне оно написано, независимо от того, как распределила числа по карточкам Таня. При каких натуральных значениях $n > 5$ Аня не сможет этого сделать?

Т. Голенищева-Кутузова, Т. Казицына, upgrade

Ответ: при $n = 6$ или $n = 7$.

Решение. Если $n = 7$, то Таня может написать на карточках пары чисел (1, 3), (2, 4) и (5, 7). Будем условно считать, что сторона с меньшим числом покрашена в синий цвет, а с большим — в красный. Тогда, как бы Аня ни выкладывала карточки, она будет получать только четыре суммы: 8, 10, 12, 14. Каждая из этих сумм соответствует количеству карточек, выложенных красной стороной вверх (0, 1, 2 и 3 соответственно). Тогда для Ани карточки неразличимы (то есть с её точки зрения ничего не изменится, если в любой паре карточек поменять числа местами). В этом случае она не сможет выполнить то, что требуется.

Если $n = 6$, то Таня может написать на карточках пары чисел (1, 2), (3, 4) и (5, 6), тогда соответствующие суммы равны 9, 10, 11, 12 и рассуждения, показывающие, что Аня не сможет выполнить требуемое, аналогичны приведённым выше.

При остальных значениях n рассмотрим наибольшую разность пары чисел на карточках. Она не меньше чем 3. Тогда Аня спросит про сумму чисел на карточках, а затем перевернет одну карточку и снова спросит про сумму. Таким образом она сможет определить разность чисел на любой карточке. Если наибольшая разность уникальна, то большее число на соответствующей карточке — это n, и Аня сможет его определить.

Если же такая разность не одна, то $n = 8$. В обоих случаях пары на карточках определяются однозначно: если рассматриваемая разность равна 3, то пары чисел на карточках — это (1, 4), (5, 8), (2, 3), а если она равна 4, то пары чисел на карточках — это (1, 5), (4, 8), (2, 3). В первом случае разности чисел на карточках — это 3, 3 и 1, а во втором — это 4, 4 и 1. Тогда Аня сумеет определить числа 2 и 3 на третьей карточке.

7. Делитель. Игорь записал некоторое число, в котором не меньше чем два разряда, используя только несколько цифр 1, 3, 7 или 9 (не обязательно все). Докажите, что у такого числа есть простой делитель, который не меньше чем 11.

Иберо-американская олимпиада, 1999

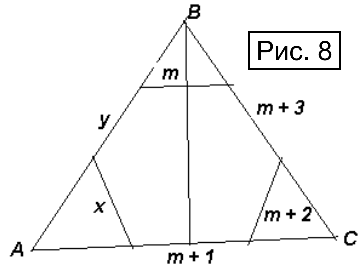
Решение. Пусть все простые делители записанного числа меньше чем 11. Так как последняя цифра числа — это 1, 3, 7 или 9, то 2 и 5 не могут быть его делителями. Тогда записанное число представимо в виде $3^k \cdot 7^n$, где k и n — целые неотрицательные числа.

По индукции докажем, что у любого числа такого вида в разряде десятков стоит чётная цифра. Для чисел 3 и 7 это верно. Если это верно для какого-то числа указанного вида, то при умножении его последней цифры (1, 3, 7 или 9) на 3 или на 7 переноса в разряд десятков либо не происходит, либо добавляется чётная цифра, поэтому цифра в разряде десятков остаётся чётной. Но в записи числа все цифры нечётные. Противоречие.

Последнюю часть рассуждения можно заменить рассмотрением выражения $3^k \cdot 7^n$ по модулю 20.

8. Ось симметрии. В выпуклом шестиугольнике с равными углами длины четырёх подряд идущих сторон равны m см, $m + 3$ см, $m + 2$ см и $m + 1$ см (m — некоторое положительное число). Докажите, что у этого шестиугольника есть ось симметрии.

Южный математический турнир, 2013



Решение. Из условия следует, что каждый угол шестиугольника равен $720^\circ : 6 = 120^\circ$. Пусть длины следующих двух сторон шестиугольника равны x см и y см соответственно. Продлив стороны $m + 3$, $m + 1$ и y до их попарного пересечения, получим треугольник ABC (см. рис. 8). Так как внешние углы шестиугольника равны по 60°, то углы треугольника ABC также равны по 60°, то есть он равносторонний. Кроме того, треугольники, дополняющие данный шестиугольник до ABC, также равносторонние. Тогда $BC = m + (m + 3) + (m + 2) = 3m + 5$, $AC = (m + 2) + (m + 1) + x = 2m + x + 3$, $AB = x + y + m$. Так как $BC = AC = AB$, то $x = m + 2$, $y = m + 3$.

Заметим, что серединный перпендикуляр к стороне AC является осью симметрии треугольника ABC. Он же является серединным перпендикуляром к сторонам $m + 1$ и m шестиугольника, то есть осью симметрии каждой из них. Остальные стороны шестиугольника попарно симметричны относительно этой же прямой, поэтому она является его осью симметрии.

9. Авиакомпании. В стране $n > 1$ городов, и между каждыми двумя летают самолёты ровно одной из авиакомпаний. Из-за ограниченности парка самолётов каждая компания делает не больше чем $n - 2$ авиарейса (каждый авиарейс — это полёт от одного города к другому и обратно). Докажите, что можно выбрать три города, между которыми курсируют самолеты трёх разных компаний.

Материалы американских олимпиад

Решение. Заметим, что ни одна авиакомпания не может связать все города страны, так как для этого потребовалось бы не меньше чем $n - 1$ авиарейсов. Рассмотрим ту компанию (назовём её первой), которая связывает наибольшее количество городов (наибольший связный подграф, все рёбра которого принадлежат одной авиакомпании). Эту сеть городов обозначим через S. Также рассмотрим город g, не входящий в эту сеть. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть A — множество городов из S, в которые из города g и обратно летают самолёты некоторой компании (назовём её второй). Заметим, что множество A не может совпадать с S, иначе нашлась бы связная сеть на один город больше, что противоречит нашему выбору S. Тогда найдётся множество B городов из S, в которые из города g и обратно летают самолёты другой (третьей) компании, при этом в силу связности сети S множество B можно выбрать так, что в нём есть хотя бы один город y, смежный в сети S с одним из городов множества A. Тогда между какой-то парой городов, один из которых в A, а другой — в B, должен быть рейс первой компании, так как и A, и B входят в S. Добавив g к этой паре городов, получим требуемую тройку.

Второй способ. Пусть не нашлось тройки городов, авиарейсы между которыми принадлежат трём разным компаниям. Тогда все рейсы из g в S принадлежат одной авиакомпании. Действительно, пусть какой-то город x сети S соединён с g рейсом некоторой авиакомпании (назовём её второй). Тогда все смежные с x города в сети S соединены с g рейсами второй авиакомпании, тогда смежные с ними — также, и так далее. Значит, на городах сети S вместе с g образуется связный «одноцветный» подграф (по рейсам второй авиакомпании), в котором городов больше, чем в S — противоречие.