XXIII Устная городская математическая олимпиада для 6-7 классов
05.04.2026
Решения задач
6 класс

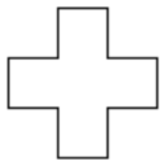
1. Кофейня. Ксюша, Лёня и Марина заходили выпить кофе в кофейню. Лёня пришёл в кофейню через 7 минут после Ксюши и за 9 минут до Марины, а ушёл через 2 минуты после того, как ушла Ксюша. При этом Марина провела в кофейне в два раза меньше времени, чем Ксюша, и в полтора раза меньше, чем Лёня. Кто ушёл из кофейни позже — Лёня или Марина, и на сколько?

И. Русских

Ответ: Марина ушла позже на 4 минуты.

Решение. Будем вести отсчёт времени от момента прихода Ксюши, то есть считать, что она пришла в момент времени 0 минут. Тогда Лёня пришёл в 7 минут, а Марина — в 16 минут. Если Ксюша ушла в t минут, то Лёня ушел в $t + 2$ минуты и провёл в кофейне $t - 5$ минут. Значит, с одной стороны, Марина провела в кофейне $\frac{t}{2}$ минут, а с другой — $\frac{t-5}{1{,}5}$ минут. Получим уравнение: $\frac{t-5}{1{,}5} = \frac{t}{2}$, откуда $t = 20$. Следовательно, Лёня ушел в 22 минуты, а Марина ушла в $16 + 10 = 26$ минут, то есть на 4 минуты позже Лёни.

2. Квадраты из креста. Имеется жёсткий проволочный контур 12-угольного креста, все стороны которого равны (см. рисунок). Покажите, как разрезать этот контур на 8 частей и спаять из них два отдельных одинаковых квадрата. (*Проволоку гнуть нельзя*).



А. Шаповалов

Решение. На рис. 2 слева показан способ разрезания, а справа — как из четырёх полученных частей спаять квадрат. Второй квадрат получается точно так же из других четырёх частей.

Существуют и другие способы решения.

Путь к решению: достаточно заметить, что у креста 12 сторон, а у двух квадратов — 8, следовательно, сторона квадрата должна быть в полтора раза длиннее стороны креста.

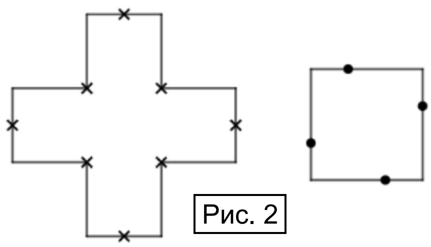


Рис. 2

3. Фальшивые эксперты. На экспертизу было представлено 7 монет. Каждый из трёх экспертов указал на монеты, которые он считает фальшивыми. Первый указал на некоторые 6 монет, второй — также на некоторые 6 монет, а третий — на некоторые 5 монет. Оказалось, что на самом деле фальшивых монет было всего 3. При этом количество монет, в которых ошибся каждый из экспертов, различное у всех троих. Сколько монет ошибочно посчитал фальшивыми последний эксперт?

Т. Казицына

Ответ: две.

Решение. Первый и второй эксперты могли ошибиться в трёх монетах (если среди указанных ими были все три фальшивые) или в четырёх (если указали только на две фальшивые). Так как количество монет, в которых ошибся каждый из экспертов, различное, то один из них ошибся в трёх монетах, а другой — в четырёх. Третий эксперт ошибся не менее чем в двух монетах (если указал на все три фальшивые) и не более чем в четырёх (если указал только на одну фальшивую). По условию он не мог ошибиться в трёх и четырёх монетах, значит, он ошибся в двух.

4. Викторина. Костя, Миша и Антон участвовали в школьной викторине. Всего было меньше чем 60 вопросов, на каждый из которых отвечал ровно один из участников (тот, кто нажимал кнопку первым). За верный ответ давалось 10 очков, а за неверный снималось 10 очков. Все участники дали одинаковое количество верных ответов, но в итоге оказалось, что Костя и Миша набрали по 110 очков каждый, а Антон — минус 100 очков. Сколько очков набрал бы Антон, если бы он ответил верно на все свои вопросы?

М. Евдокимов

Ответ: 320.

Решение. Так как Костя и Миша дали одинаковое количество верных ответов и набрали одинаковое количество очков, то и количество неверных ответов у них одинаковое. Пусть оно равно x, тогда, так как они набрали по 110 очков, то каждый из них верно ответил на $11 + x$ вопросов (x верных ответов и x неверных друг друга скомпенсировали).

Так как Антон набрал минус 100 очков, то он неверно ответил на $x + 21$ вопрос. Таким образом, всего было задано $3(11 + x) + 2x + x + 21 = 54 + 6x$ вопросов. Так как по условию $54 + 6x < 60$, то $x < 1$, то есть $x = 0$. Значит, каждый из ребят верно ответил на 11 вопросов, Костя и Миша ошибок не допустили, а Антон ошибся 21 раз. Если бы он не ошибался, то ответил бы верно на 32 вопроса и набрал бы 320 очков.

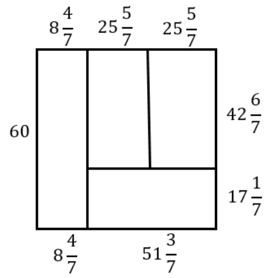
5. Нецелые периметры. Барон Мюнхгаузен рассказал, что у него есть 4 прямоугольника равного периметра, который составляет не целое число сантиметров. Барон утверждает, что из этих прямоугольников он сложил квадрат со стороной 60 см. Могут ли слова барона быть правдой?

А. Шаповалов

Ответ: могут.

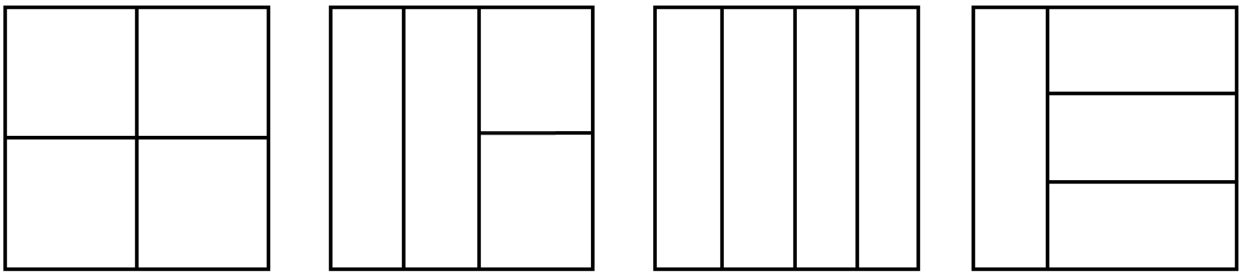
Решение. Пример — см. рис. 5а. Периметр каждого прямоугольника равен $137\frac{1}{7}$ см.

Рис. 5а



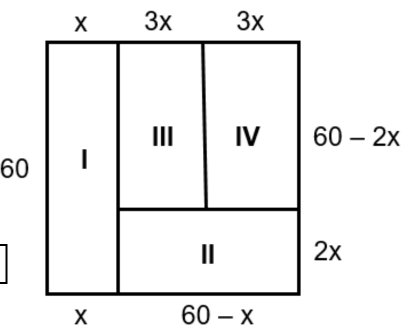
Путь к решению. На рис. 5б приведены другие различные способы сложить квадрат со стороной 60 см из четырёх прямоугольников равного периметра, но во всех случаях периметр прямоугольника равен целому числу сантиметров.

Рис. 5б



Остаётся только способ, который показан на рис. 5в. Пусть стороны прямоугольника I равны 60 см и x см. Тогда большая сторона прямоугольника II равна 60 – x (см). Полупериметр каждого прямоугольника равен 60 + x (см), поэтому другая сторона прямоугольника II равна 60 + x – (60 – x) = 2x см. Тогда у прямоугольников III и IV одна сторона равна 60 – 2x (см), а другая равна 60 + x – (60 – 2x) = 3x см. Получим, что 7x = 60, откуда и следует пример, приведённый выше.

Рис. 5в



6. Числа на карточках. Таня написала невидимыми чернилами на трёх карточках числа 1, 2, 3, 4, 5, 7 (по одному числу с каждой стороны) и сообщила Ане этот набор чисел. Аня может выложить карточки любой стороной и спросить сумму чисел на тех сторонах всех трёх карточек, которые окажутся сверху, и сделать это несколько раз. После этого она должна верно назвать хотя бы одно число, указав, на какой карточке и на какой её стороне оно написано, независимо от того, как распределила числа по карточкам Таня. Всегда ли Аня сможет это сделать?

Т. Голенищева-Кутузова, Т. Казицына

Ответ: не всегда.

Решение. Пусть Таня напишет на карточках пары чисел (1, 3), (2, 4) и (5, 7). Будем условно считать, что сторона с меньшим числом покрашена в синий цвет, а с большим — в красный. Тогда, как бы Аня ни выкладывала карточки, она будет получать только четыре суммы: 8, 10, 12, 14. Каждая из этих сумм соответствует количеству карточек, выложенных красной стороной вверх (0, 1, 2 и 3 соответственно). Тогда для Ани карточки неразличимы (то есть с её точки зрения ничего не изменится, если в любой паре карточек поменять числа местами). В этом случае она не сможет выполнить то, что требуется.

7. Бизнес-ланчи. Ресторатор каждую неделю стал закупать партию бизнес-ланчей по 31 кроне за каждый обед и начал их продавать по более высокой цене. В первую неделю часть обедов осталась непроданной, и вместо прибыли бизнесмен получил убыток 625 крон. На вторую неделю он повысил цену на обед ещё на 25%, но и продал меньше на 10%, в результате общий убыток за две недели возрос до 650 крон. На третью неделю ресторатор снова увеличил цену на 25%, а обедов продал ещё на 10% меньше, вышел в ноль и бросил эту затею. Сколько стоил обед на третьей неделе?

М. Хачатурян

Ответ: 75 крон.

Решение. Пусть в первую неделю ресторатор продал x обедов по y крон за каждый, тогда во вторую неделю он продал $\frac{9}{10}x$ обедов по цене $\frac{5}{4}y$ крон, в третью — $\frac{81}{100}x$ обедов по цене $\frac{25}{16}y$ крон. Выручка ресторатора за первую неделю составила xy крон, а за вторую — $\frac{9}{10}x\cdot\frac{5}{4}y = \frac{9}{8}xy$ крон. Так как убыток ресторатора на второй неделе составил 650 – 625 = 25 крон, то на второй неделе ему удалось выручить на 600 крон больше, чем на первой. Значит, $\frac{1}{8}xy = 600$, откуда $xy = 4800$.

Таким образом, затраты на покупку одной партии обедов составили 4800 + 625 = 5425 крон, значит, в одной партии 5425 : 31 = 175 обедов. Так как число $\frac{81}{100}x$ должно быть целым, а числа 81 и 100 взаимно простые, то x кратно 100. Но $x \le 175$, значит, $x = 100$. Тогда $y = 48$, поэтому на третьей неделе обед стоил $48\cdot\frac{25}{16} = 75$ крон.

Отметим, что условие задачи непротиворечиво: за третью неделю прибыль ресторатора составила 81·75 – 5425 = 650 крон, что как раз и покрыло его предыдущие убытки.

8. Аквариум. Стеклянный аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. В инструкции к нему сказано, что максимально допустимая высота воды в аквариуме — 45 см. В аквариум помещается не больше чем 54 дм^3 воды. Если положить аквариум на один бок так, чтобы длина стала высотой, то максимальная вместимость не изменится, а если на другой бок так, чтобы ширина стала высотой, вместимость будет равна 72 дм^3. Найдите длины сторон аквариума.

И. Русских

Ответ: 60 см, 60 см и 20 см.

Решение. Пусть длины сторон аквариума равны a см, b см и c см. Если a см – высота аквариума, то в него помещается $45bc$ см^3 воды при $a \geq 45$ см и abc см^3 в противном случае. Аналогично и для других положений аквариума. Рассмотрим несколько случаев.

1) Каждое измерение параллелепипеда меньше чем 45 см. В этом случае в аквариум в любом положении помещается abc см^3 воды. Но по условию аквариум можно поставить так, что его вместимость изменится, то есть этот случай невозможен.

2) Ровно два измерения меньше чем 45 см, например $a < 45$ см, $b < 45$ см, $c \geq 45$ см. Этот случай также невозможен, так как в двух положениях в аквариум помещается abc см^3 воды, а еще в одном — $45ab$ см^3, но при этом $abc \geq 45ab$, что противоречит условию.

3) Ровно одно измерение меньше чем 45 см, например $a < 45$ см, $b \geq 45$ см, $c \geq 45$ см. Тогда вместимость аквариума в разных положениях равна abc см^3, $45ab$ см^3 и $45ac$ см^3, причём abc — наибольшая величина из трёх. Следовательно, из условия $45ab = 45ac$ получим, что $b = c$. Кроме того, $45ab = 54000$, откуда $ab = 1200$, и $ab^2 = 72000$, поэтому $b = 60 = c$. Тогда $a = 20$.

4) Каждое измерение не меньше чем 45 см. Тогда вместимость аквариума в разных положениях равна $45bc$ см^3, $45ab$ см^3 и $45ac$ см^3. Но тогда каждое из этих чисел не меньше чем 45^3 см^3, а это больше чисел, заданных в условии.

9. Дети по кругу. По кругу сидят несколько детей. Каждый мальчик подсчитал, сколько девочек сидит между ним и ближайшим мальчиком. Среди чисел есть семь различных. Каково наименьшее количество детей?

А. Шаповалов, upgrade

Ответ: 35.

Решение. Оценка. Заметим, что наименьшее из чисел должны были назвать хотя бы два мальчика (про количество девочек, сидящих между ними), поэтому мальчиков не меньше чем 8. Пусть названо семь различных чисел: $a < b < c < d < e < f < g$. Тогда рядом с одним мальчиком сидят a девочек, с другим — b, и так далее. При этом с одной стороны от мальчика, который назвал число g, сидит g девочек, а с другой — не меньше чем g. Таким образом, всего детей не меньше чем $8 + a + b + c + d + e + f + 2g \geq 8 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 2\cdot 6 = 35$.

Пример. ммдмддмдддмддддмдддддмддддддмдддддд.