XX устная городская математическая олимпиада для 6-7 классов
09.04.2023
7 класс

1. **По кругу**. Петя расставил по кругу числа от 1 до 15 в некотором порядке и вычислил разность каждых двух соседних чисел (вычитая из большего числа меньшее). Может ли сумма всех полученных разностей равняться 24?

Baltic Way, 1990, упрощение

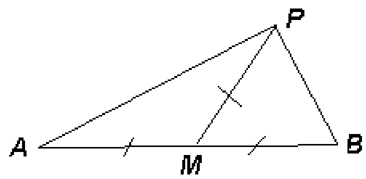
Ответ: нет.

Решение. Пусть это возможно. Рассмотрим числа 1 и 15. Пусть на одной из дуг между ними стоят по порядку числа a_1, a_2, ..., a_k. Тогда $|a_1 – 1| + |a_2 – a_1| + ... + |15 – a_k| \geq (a_1 – 1) + (a_2 – a_1) + ... + (15 – a_k) = 15 – 1 = 14$. Это верно и для расстановки чисел на второй дуге между 1 и 15. Таким образом, для всей расстановки указанная сумма будет не меньше, чем 14 + 14 = 28. Противоречие.

2. **Многоугольник**. Внутри выпуклого многоугольника нашлась точка, которая до середины каждой стороны, кроме одной, удалена на половину этой стороны. Обязательно ли это верно и для оставшейся стороны?

А. Пешнин

Ответ: обязательно.



Решение. Рассмотрим фрагмент данного многоугольника (см. рисунок, P – указанная точка, AB – одна из сторон, для которой выполняется условие, M – середина AB). По условию $PM = 0{,}5AB$, значит, $\angle APB = 90°$. Аналогичное утверждение верно для всех сторон, кроме той, которая выделена в условии. Значит, полный угол вокруг точки P, равный 360°, разбивается на несколько слагаемых по 90°, а оставшееся слагаемое меньше 180°. Тогда оно также равно 90°, то есть оставшийся треугольник также прямоугольный, поэтому его медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине. Следовательно, и от середины оставшейся стороны точка P удалена на половину этой стороны.

Из приведённого рассуждения следует, что многоугольник, указанный в условии, является четырёхугольником, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке P.

3. **Шахматный турнир**. В турнире участвовали десять шахматистов. Каждый сыграл с каждым два раза: один раз белыми и один раз чёрными, причём какую-то из этих партий выиграл, а другую проиграл (ничьих не было). Могло ли оказаться, что половину всех партий выиграли белые, а половину – чёрные?

Б. Френкин

Ответ: не могло.

Решение. В партиях каждых двух шахматистов было либо две победы белых, либо две победы чёрных. Значит, общее число побед у белых чётно. Количество пар шахматистов: $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, поэтому если бы половину всех партий выиграли белые, то у них было бы 45 побед, но это число нечётное. Следовательно, такого быть не могло.

4. **Простое число**. Найдите все тройки (a; b; c) натуральных чисел, для которых выполняется равенство $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a+c}{a+b}$, если известно, что $ab + bc + ca$ – простое число.

Фестиваль юных математиков, 2015

Ответ: (1; 1; 1).

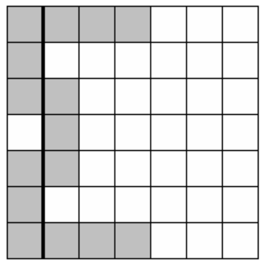
Решение. По свойству пропорции: $(a + b)^2 = (a + c)(b + c)$, то есть $(a + b)^2 = ab + bc + ca + c^2$. Отсюда $(a + b + c)(a + b - c) = ab + bc + ca$. В правой части этого равенства – простое число, поэтому и в левой части – простое число. Значит, один из множителей в левой части равен этому числу, а другой – равен 1 (оба множителя отрицательными быть не могут). Так как первый множитель больше второго, то $a + b + c = ab + bc + ca$. Числа a, b и c – натуральные, поэтому полученное равенство выполняется только при $a = b = c = 1$ (иначе левая часть меньше правой). Найденная тройка чисел удовлетворяет условию задачи.

5. **Равные куски**. Некоторые клетки доски размером 7×7 покрашены в чёрный цвет, образуя чёрный многоугольник. Его разрезали по прямой, идущей по линии сетки. Мог ли он распасться на пять равных фигур?

А. Шаповалов

Ответ: мог.

Решение. Пример многоугольника показан на рисунке. При разрезании по вертикальной жирной линии он распадается на пять прямоугольников размером 1×3.



6. **Тёзки**. Ученики писали олимпиаду в двух залах. Ни в одном из залов не было трёх тёзок. У 100 учеников были два тёзки в другом зале. У 144 учеников было хотя бы по одному тёзке в каждом зале. У скольких учеников было ровно по одному тёзке в каждом зале? (*Напомним, что тёзками считаются люди с одинаковыми именами*.)

А. Шаповалов

Ответ: у 88 учеников.

Решение. Понятно, что на олимпиаде не могло быть группы более чем из четырёх тёзок, иначе трое из них оказались бы в одном зале, что противоречит условию.

Если у ученика не было тёзок или был всего один тёзка, то этот ученик не входит ни в одну сумму из условия.

Если на олимпиаде было четыре тёзки, то они сидели по два человека в зале и каждый из них входит в обе суммы.

Если было ровно три тёзки, то один из них сидел в одном зале, а другие двое – в другом. Тогда один ученик из тройки входит в первую сумму, а двое – во вторую, поэтому вторая сумма больше первой как раз на число троек тёзок, то есть всего было 144 – 100 = 44 тройки. Но ровно по одному тёзке в обоих залах было только у двоих учеников из каждой тройки, которые сидели в одном зале. Следовательно, таких учеников было $2\cdot44=88$.

7. **Процесс**. На доске записаны числа 1000, 1001, ..., 2999. На каждом шаге разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число, равное $\frac{\min(a,b)}{2}$. После 1999 таких операций на доске останется одно число. Докажите, что оно меньше 1.

T. Andreescu, «101 Problems in Algebra From the Training of the USA IMO Team»

Решение. Рассмотрим сумму S чисел, обратных к записанным на доске перед любым шагом. Докажем, что с каждым шагом величина S не уменьшается. Пусть на каком-то шаге выбраны два числа a и b так, что $a \geq b$, тогда вместо них на доске появится число $\frac{b}{2}$. В этом случае, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}$, поэтому S либо увеличилась, либо не изменилась.

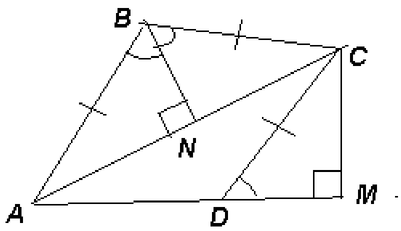
Докажем теперь, что $S_0 = \frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+...+\frac{1}{2999} > 1$. Для этого достаточно все слагаемые, кроме $\frac{1}{1000}$ и $\frac{1}{2000}$, разбить на пары вида $\left(\frac{1}{2000+k};\ \frac{1}{2000-k}\right)$. Таких пар 999 и в каждой из них $\frac{1}{2000+k}+\frac{1}{2000-k}=\frac{2\cdot 2000}{2000^2-k^2}>\frac{2\cdot 2000}{2000^2}=\frac{1}{1000}$. Следовательно, $S_0 > 1 + \frac{1}{2000} > 1$, поэтому на любом шаге $S > 1$.

После 1999 шагов величина S представляет собой число, обратное оставшемуся на доске, значит, оставшееся число меньше 1.

8. **Угол**. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* равны стороны *AB*, *BC* и *CD*, а угол *D* равен сумме углов *A* и *C*. Чему равен угол *DAC*?

М. Евдокимов

Ответ: 30°.



Решение. Заметим, что угол *D* – тупой. Действительно, сумма углов *A*, *C* и *D* выпуклого четырехугольника должна быть больше 180°, а угол *D* – половина этой суммы, то есть $\angle D > 90°$.

Из вершины *C* опустим перпендикуляр *CM* на прямую *AD*, а из вершины *B* – перпендикуляр *BN* на диагональ *AC* (см. рисунок). Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = \chi$, тогда $\angle CDM = 180° - \angle D = 180° - \alpha - \chi$, $\angle ABC = 360° - \angle A - \angle C - \angle D = 360° - 2\alpha - 2\chi$. Следовательно, $\angle ABN = \angle CBN = 0{,}5\angle ABC = 180° - \alpha - \chi = \angle CDM$.

Значит, прямоугольные треугольники *ANB*, *CNB* и *CMD* равны (по гипотенузе и острому углу), откуда *CM* = *CN* = *AN*. Таким образом, в прямоугольном треугольнике *ACM* катет *CM* вдвое меньше гипотенузы *AC*, поэтому $\angle DAC = 30°$.

9. **Карточки**. На столе лежат 13 карточек рубашками вверх, на трёх из них записана цифра 1, на десяти записана цифра 0. За один вопрос можно узнать произведение чисел на любых трёх карточках. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно найти хотя бы одну карточку, на которой записан 0?

С. Губанов

Ответ: за 66 вопросов.

Решение. *Оценка*. Заметим, что количество различных троек, в которые входит каждая карточка, равно $C_{12}^2=\frac{12!}{10!2!}=\frac{12\cdot 11}{2}$ = 66. Предположим, что нам удалось задать меньше 66 вопросов и найти искомую карточку *X*. Тогда для каждой карточки существует содержащая её тройка, произведение чисел в которой мы не знаем. Пусть все полученные нами ответы – это нули (ответ 1 возникает только в одном случае, гарантировать который мы не можем). Тогда для каждой карточки возможна ситуация, что на ней записана цифра 1, а две оставшиеся единицы в той самой тройке, про которую мы не спросили. Но возможна и другая ситуация: на карточке записан 0, а три единицы оказались на одной из троек, про которые мы не спросили. Следовательно, опознать хотя бы одну карточку с нулём, задав меньше, чем 66 вопросов, может не получиться.

Пример. Зафиксируем одну карточку и спросим произведение чисел в каждой из 66 троек, которые она образует с двумя другими. Если все произведения будут нулями, то эта карточка искомая. Если же одно из произведений равно 1, то на каждой карточке этой тройки записана цифра 1. Тогда искомой будет любая из оставшихся десяти карточек.